PERIODICAL
UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
5856-171

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

54. BAND, 1. HEFT
MIT 3 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM MÄRZ 1950)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1950

Mh. Math.
77
54-58

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

54. Band/1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Hlawka, E. Über Integrale auf konvexen Körpern I. 1

Hornich, H. Beschränkte Integrale auf speziellen transcendenten Riemannschen Flächen 37

Kruppa, E. Das Analogon zu einem Satz von Cesàro über Bertrand-Kurven im Bereich der Strahlflächen 45

Wunderlich, W. Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind . 55

Gröbner, W. Über die Eliminationstheorie 71

Buchbesprechungen 79

Über Integrale auf konvexen Körpern I.

Von
Edmund Hlawka, Wien.

(Eingelangt am 8. Juni 1949.)

Einleitung.

Es sei B ein konvexer Körper im R_m ($m \geqq 2$), der den Ursprung o im Innern enthält. Es sei $f(x)$ seine Distanzfunktion und B sei ihr Eichkörper. (Wir bezeichnen die Punkte $(x_1, \ldots, x_m)$ mit x und fassen sie als Spaltenvektoren auf). Dann führen Probleme aus der Geometrie der Zahlen auf die Integrale $G_1(l) = \int\limits_B (m + i\,l\,x)\, e^{ilx}\, dx$, $G(l) = \int\limits_B e^{ilx}\, dx$, allgemeiner auf $\int\limits_B \Phi(f(x))\, e^{ilx}\, dx$ (dx Volumselement, $l\,x = \sum l_j x_j$). Ist B die Kugel vom Radius 1, so lassen sich G_1 und G durch Besselfunktionen ausdrücken:

$$G_1 = (2\pi)^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}-1}(|l|)/|l|^{\frac{m}{2}-1}, \quad G = (2\pi)^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(|l|)/|l|^{\frac{m}{2}}.$$

Es interessiert vor allem das Verhalten dieser Integrale für großes $|l|$. Hier ist, soviel ich weiß, außer für $m = 2$ nichts bekannt, wenn B nicht gerade ein Parallelepiped oder ein Ellipsoid ist.* Unter Voraussetzung weiterer Eigenschaften von B gelingt es nun asymptotische Ausdrücke für G_1 und G anzugeben (§ 3, § 5). Der Rand $S(B)$ von B muß sich durch gleichsinnig-parallele Stützebenen umkehrbar eindeutig und 6 m-mal stetig auf die Oberfläche der Einheitskugel abbilden lassen. Weiter muß, und dies ist die wesentliche Einschränkung, inf $K > 0$ auf $S(B)$ sein, wo K das Produkt der Hauptkrümmungsradien ist.

Zur Herleitung der asymptotischen Entwicklungen benützen wir die Methode der stationären Phase, wie sie van der Corput[1] in strenger und umfassender Weise begründet hat. Das von uns Benötigte wird in § 2, Hilfssatz 1 hergeleitet.

---

* Vgl. aber *F. John*, Math. Anm. 109, S. 488.

[1] Compositio Mathematica I, III. Proceedings Amsterdam 51, S. 650.

Die Integrale $\int\limits_B \Phi(f)\, e^{ilx}\, dx$ lassen sich auf die einfachen Integrale $\int\limits_0^1 \Phi(u)\, u^{m-1}\, G_1(u\, l)$ zurückführen (§ 1). Dies ist für die Kugel bekannt (vgl. Bochner[2]), aber im allgemeinen Fall scheint sie neu zu sein. Diese Formel ermöglicht es, auch für diese Integrale asymptotische Ausdrücke anzugeben. Dies wird insbesondere für $\int\limits_B (1 - f^2)^\delta\, e^{ilx}\, dx$ ($\delta \geqq 0$) durchgeführt (§ 4, § 5). Für die Kugel ist der Wert bekanntlich $(2\pi)^{\frac{m}{2}}\, 2^\delta\, \Gamma(\delta+1)\, J_{\frac{m}{2}+\delta}(|l|) \,/\, |l|^{\frac{m}{2}+\delta}$.

Die weiteren Paragraphen bringen Anwendungen auf die Theorie der Gitterpunkte. Es wird z. B. in § 8 gezeigt, daß der „Gitterrest" $\Phi(0, u) - \Im u^{\frac{m}{2}}$, wo Φ die Anzahl der Gitterpunkte in $f \leqq \sqrt{u}$ und $\Im$, das Volumen von B ist, $O\left(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}\right)$ und $\Omega\left(u^{\frac{m-1}{4}}\right)$ ist, Abschätzungen, wie sie bei der Kugel bekannt sind und die sich noch verschärfen ließen. In § 9 und § 10 verallgemeinern und verschärfen wir die interessanten Untersuchungen von Kendall[3]. § 11 beschäftigt sich mit einem Problem aus der Geometrie der Zahlen: Es ist durch Blichfeldt, van der Corput[4] u. a. bekannt, daß für die Anzahl $2S$ der Gitterpunkte $\neq 0$ in einen konvexen Körper $B_t : f(x) \leqq t$, $\Im t^m \leqq 2^m (S+1)$ gilt.

Es gelingt uns, wenn $m \not\equiv 1\ (4)$, diese Abschätzung für großes t zu verschärfen, wenn B die obigen Voraussetzungen erfüllt. § 12 bringt die Abschätzung der Zahl $2S$ in Zusammenhang mit dem analogen Problem für den polaren Körper von B. In einen Spezialfall (B Parallelepiped, $S = 0$) wurde die Methode dieses Paragraphens bereits von *Gelfond*[5] angewandt. Weitere Anwendungen und Verschärfungen der asymptotischen Entwicklungen werden in der Fortsetzung dieser Arbeit gegeben werden.

§ 1.

Es sei $f(x)$ stetig, dann gilt folgender

Satz 1: Es sei $\Phi(u)$ stetig auf dem Intervall $[0, T]$, $T > 0$, dann ist

$$\int\limits_{f \leqq T} e^{ilx}\, \Phi(f)\, dx = \int\limits_0^T \Phi(u)\, u^{m-1}\, du \int\limits_{f(x) \leqq 1} e^{iulx}\, (m + i\, u\, l\, x)\, dx \qquad (1)$$

[2] Vorlesungen über Foursche Integrale, S. 186, Satz 56.
[3] Quarterly Journal 19 (1948).
[4] Acta Arithmetica 2.
[5] C. R. URSS 1937, XVII, S. 447.

Beweis: $O \,.\, B \,.\, d \,.\, A$. kann vorausgesetzt werden, daß $\Phi(u)$ ein Polynom ist. Dann ist

$$\int_{f \leqq T} e^{ilx} \Phi(f) dx = \Phi(T) \int_{f \leqq T} e^{ilx} dx - \int_{f \leqq T} e^{ilx} (\Phi(T) - \Phi(f)) dx = I_1 - I_2.$$

Es ist $I_1 = \Phi(T)\, T^m \int_{f \leqq 1} e^{ilx} dx$ und

$$I_2 = \int_{f \leqq T} e^{ilx} dx \int_{f(x)}^{T} \Phi'(u) du = \int_0^T \Phi'(u) du \int_{f \leqq u} e^{ilx} dx =$$

$$= \int_0^T \Phi'(u)\, u^m du \int_{f \leqq 1} e^{iulx} dx = \Phi(T)\, T^m \int_{f \leqq 1} e^{ilx} dx -$$

$$- \int_0^T \Phi(u) du \int_{f \leqq 1} \frac{d}{du} (e^{iulx}\, u^m) dx \qquad (2)$$

und daraus folgt die Behauptung.

Folgerung. Ist $\Phi(T) = 0$, $\Phi'(u)$ vorhanden und existiert $\int_0^T \Phi'(u)\, u^m du \int_{f \leqq 1} e^{iulx} dx$, so ist

$$\int_{f \leqq T} e^{ilx} \Phi(f) dx = - \int_0^T \Phi'(u)\, u^m du \int_{f \leqq 1} e^{iulx} dx \qquad (3)$$

Dies gilt auch dann noch, wenn das Integral rechts in (3) ein uneigentliches ist.

§ 2.

Für die weiteren Entwicklungen benötigen wir einen Hilfssatz über die Methode der stionären Phase. Wir benützen Methoden, die *van der Corput*[1] entwickelt hat.

Hilfssatz 1: Auf einem Intervall $[a, b]$ seien zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ definiert. Sie seien $3(k+1)$-mal stetig differenzierbar (k natürliche Zahl beliebig). Es sei weiter

$$f'(a) = f'(b) = 0,\ f''(a) < 0,\ f''(b) > 0,\ f'(x) \neq 0 \text{ in } (a, b) \qquad (1)$$

Dann ist für $\omega \geqq 1$

$$\int_a^b g(x)\, e^{i\omega f(x)} dx = \Sigma_k(a) + \Sigma_k(b) + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{k}{2}+1}}\right) \qquad (2)$$

wo

$$\begin{cases} \Sigma_k(a) = \frac{1}{2} e^{i\omega f(a)} \sum_{j=0}^{k} A_j \; e^{-\frac{i(j+1)\pi}{4}} \omega^{-\frac{j+1}{2}} \\ \Sigma_k(b) = \frac{1}{2} e^{i\omega f(b)} \sum_{j=0}^{k} (-1) \; B_j \; e^{i\frac{(j+1)\pi}{4}} \omega^{-\frac{j+1}{2}} \end{cases} \tag{3}$$

dabei ist

$$\begin{cases} A_j = \sum_{t=0}^{j} \frac{1}{j!} \; \Gamma\left(\frac{j+1}{2} + t\right) \left(\frac{1}{2} |f''(a)|\right)^{-\frac{j+1}{2} - t} l_{t, j+2t}(a) \\ l_{t\,s}(a) = \sum_{n=3t}^{s} \binom{s}{n} g^{(s-n)}(a) \, K_{tn}(a) \\ K_{00} = 1, \; K_{0n} = 0 \; (u \geqq 1), \; K_{t+1,\,n+1} = \sum_{r=3t}^{n-2} \binom{n}{r} f^{(n-r+1)}(a) \, K_{tr} \end{cases} \tag{A}$$

Um die B_j zu erhalten ist in (A) a durch b zu ersetzen.

Beweis: Wegen (1) gibt es ein $c_1 > 0$, so daß in $[a, a + c_1]$, $|f'(x)|$ monoton wachsend und in $[b - c_1, b]$ monoton abnehmend ist. In $[a + c_1, b - c_1]$ ist $\operatorname{Min} |f'(x)| = C_1 > 0$. Es sei weiter $\operatorname{Max} |f''(x)| = C_2$

$C = \dfrac{1}{2(C_2 + 1)} \operatorname{Min}\left(|f''(a)|, |f''(b)|, C_1(C_2 + 1)\right)$ und $\varepsilon = C\omega^{-\frac{1}{3}}$.

Unter $w(x)$ verstehen wir die Funktion

$$\begin{cases} \int_x^1 e^{-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}} \, dt \; / \int_0^1 e^{-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}} \, dt \text{ wenn } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Es besitzt $w(x)$ alle Ableitungen, es ist $w(0) = 1$, $w(1) = 0$ und $w^{(j)}(0) = w^{(j)}(1) = 0$ für $j \geqq 1$.

Es sei $N_a(x) = w\left(\dfrac{x - a}{\varepsilon}\right)$, $N_b(x) = w\left(\dfrac{b - x}{\varepsilon}\right)$. Dann ist also

$$N_a(a) = 1, \; N_a^{(j)}(a) = N_a^{(j)}(a + \varepsilon) = 0, \; (j \geqq 1), \; N_a^{(j)}(x) = 0\left(\frac{1}{\varepsilon^j}\right) \; (j \geqq 0) \tag{4}$$

und $N_a(x) = 0$ für $x > a - \varepsilon$. Das analoge gilt für $N_b(x)$.

Es ist nun weiter

$$|f'(x)| \geqq \tfrac{1}{2} |f''(a)| \, (x - a) \text{ für } a \leqq x \leqq a + \varepsilon, \tag{5}$$

denn es ist ja $f'(x) = (x - a)\,[f''(a) + (x - a)\,f'''(a + \vartheta(x - a))]$, also $|f'(x)| \geqq (x - a)\,[\,|f''(a)| - \varepsilon C_2]$ w. z. b. w. Ebenso gilt

$$|f'(x)| \geqq \tfrac{1}{2}|f''(x)|\,(b-x) \text{ für } b-\varepsilon \leqq x \leqq b. \qquad (5')$$

Weiters ist in $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $|f'(x)| \geqq \text{Min}\,(\tfrac{1}{2}|f''(a)|\,\varepsilon, \tfrac{1}{2}|f''(b)|\,\varepsilon, C_1)$ also $\geqq C_3\,\varepsilon$. Es ist nun

$$\int_a^b g\,e^{i\omega f}\,dx = \int_a^b N_a\,g\,e^{i\omega f}\,dx + \int_a^b N_b\,g\,e^{i\omega f}\,dx + \int_a^b g\,H\,e^{i\omega f}\,dx, \qquad (6)$$

wo $H = g\,(1 - N_a - N_b)$.

Es ist für $0 \leqq j \leqq 3\,(k+1)$, $H^{(j)}(a) = H^{(j)}(b) = 0$, $H^{(j)}(x) = 0\,(\varepsilon^{-j})$. Wir definieren $\dfrac{H^{(j)}(a)}{(f')^{2i-j}(x)} = 0$, wenn $i \geqq j$, analog an der Stelle b.

Es sei weiters

$H_0 = H$, $H_{i+1}(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{H_i}{f'}\right)$. Es ist, wie man mittels vollständiger Induktion zeigt

$$H_i(x) = \sum_{j=0}^{i} H^{(j)}(x)\,(f')^{j-2i}\,C_j(f', \ldots, f^{(i+1)}),$$

wo C_j ein Polynom in seinen Argumenten ist. Es ist $H_i(a) = H_i(b) = 0$, $H_i(x)$ ist stetig, differenzierbar und $H_i(x) = 0\,(\varepsilon^{-2i})$. Es ist nämlich $H^{(j)}(x) = \dfrac{(x-a)^{2i-j}}{(2i-j)!}\,H^{(2i)}(a + \vartheta\,(x-a))$. Nun ist für x in $[a, a+\varepsilon]$, $|f'(x)| \geqq C_4\,(x-a)$, $H^{(2i)}(x) = 0\,(\varepsilon^{-2i})$ und die C_j sind beschränkt. Daraus folgt diese Behauptung für $[a, a+\varepsilon]$. Ebenso wird dies für $[b-\varepsilon, b]$ gezeigt. Für $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ ist die Behauptung klar.

Es ist für $j \leqq 3k+2$

$$\int_a^b H\,e^{i\omega f}\,dx = 0\,((\omega\,\varepsilon^2)^{-j}) \quad (j \geqq 0) \qquad (7)$$

Denn es ist, wie man durch mehrfache partielle Integration feststellt $\int_a^b H\,e^{i\omega f}\,dx = \dfrac{1}{(i\omega)^j}\int_a^b H_j\,e^{i\omega f}\,dx$. Aus $H_j = 0\,(\varepsilon^{-2j})$ folgt sofort die Behauptung.

Auch (7) folgt wegen $\varepsilon = C\,\omega^{-\frac{1}{3}}$ mit $j = [\tfrac{3}{2}(k+2)] + 1$

$$\int_a^b H\,e^{i\omega f}\,dx = 0\,(\omega^{-\frac{k}{2}-1}) \qquad (7')$$

In (6) sind also nur mehr die ersten beiden Integrale zu betrachten. Es sei

$I_1 = \int_a^{a+\varepsilon} B\, e^{i\omega f}\, dx$, wo $B = N_a\, g$. Es ist $B^{(j)}(x) = 0\,(\varepsilon^{-j})(j \leqq 3(k+1))$.

Wir setzen $p(x) = f(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$. Nun ist

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{3!}(x-a)^3 f'''(a + \vartheta(x-a))$$

also für $0 \leqq x - a \leqq \varepsilon$

$f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x) = 0\,(\varepsilon^{3-s})$, $(0 \leqq s \leqq 3)$, $f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x) = 0\,(1)\,(s > 3)$. (8)

Setzen wir $L = B\, e^{i\omega(f-p)}$, so wird $I_1 = \int_a^{a+\varepsilon} L\, e^{i\omega p}\, dx$. Nun ist

$\frac{d}{dx}(e^{i\omega(f-p)}) = i\omega\, e^{i\omega(f-p)}(f' - p') = 0\,(\varepsilon^2\ \omega) = 0\,(\omega^{\frac{1}{3}})$, allgemein

$$\frac{d^j}{dx^j}(e^{i\omega(f-p)}) = 0\,(\omega^{\frac{j}{3}}), \tag{9}$$

wie man mittels vollständiger Induktion zeigt, denn es ist ja

$$\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(e^{i\omega(f-p)}) = i\omega \sum \binom{j}{k} \frac{d^k e^{i\omega(f-p)}}{dx^k}\,(f^{(j-k+1)} - p^{(j-k+1)}).$$

Weiter ist

$$L^{(j)} = 0\,(\omega^{\frac{j}{3}}) \quad (j \leqq 3(k+1)), \tag{10}$$

denn nach (9) und wegen $B^{(j)} = 0\,(\varepsilon^{-j})$ ist

$$L^{(j)} = \sum \binom{j}{k} B^{(k)} \frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}} e^{i\omega(f-p)} = \sum 0\,(\varepsilon^{-k}\, \omega^{\frac{j-k}{3}}) = (\omega^{\frac{j}{3}}).$$

Wir setzen nun für $x \geqq 0$

$$\begin{cases} \psi_0(x) = e^{i\omega p} \\ \psi_{\mu+1}(x) = \dfrac{1}{\mu!} \displaystyle\int_{C(x)} (\zeta - x)^\mu\, e^{i\omega p(\zeta)}\, d\zeta \qquad (\mu \geqq 0) \end{cases} \tag{11}$$

wo $C(x)$ der Weg $\zeta(x, t) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\,(t + \frac{x^2}{t}\, i)$ $(x \leqq t \leqq \infty)$. Für $x = 0$ sei stets $\frac{x^2}{t} = 0$. Es ist $\zeta(x, x) = x$. Weiter ist, da

$$t^2 - \frac{x^4}{t^2} \geqq (t-x)^2$$

$$| e^{i\omega p(\xi)} | = e^{-\frac{\omega}{4} | f''(a) | t^2 - \frac{x^4}{t^2}} \leqq e^{-\frac{\omega}{4} | f'(a) | (t-x)^2}, \qquad (11')$$

also ist das in (11) auftretende Integral konvergent.

Weiters ist

$$\psi_{\mu+1}(x) = -\psi_\mu(x) \qquad (12)$$

denn $\frac{1}{h}(\psi_{\mu+1}(x+h) - \psi_{\mu+1}(x)) = \frac{1}{h}\left[\int_{c(x+h)} (\zeta - x - h)^\mu e^{i\omega p} d\zeta - \right.$

$$\left. - \int_{c(x)} (\zeta - x - h)^\mu e^{i\omega p} d\zeta \right] + \int_{c(x)} \frac{(\zeta - x - h)^\mu - (\zeta - x)^\mu}{h} d\zeta.$$

Der erste Teil ist $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (\zeta - x - h)^\mu e^{i\omega p} d\zeta$, geht also mit $h \to 0$ gegen 0. Der zweite Teil geht aber mit $h \to 0$ gegen $-\psi_\mu(x)$ w. z. b. w.

Es ist, wenn $\tau = \frac{t}{\sqrt{2}}$ gesetzt wird

$$\psi_{\mu+1}(0) = \frac{e^{i\omega f(a)} \frac{i(\mu+1)\pi}{4!}}{\mu!} \int_0^\infty \tau^\mu e^{-\frac{\omega}{2} | f''(a) | \tau^2} d\tau \qquad (13)$$

also

$$\psi_{\mu+1}(0) = \frac{e^{i\omega f(a)}}{2\left(\frac{\omega}{2} | f''(a) |\right)^{\frac{\mu+1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\mu!} e^{-\frac{i(\mu+1)\pi}{4}} \qquad (13')$$

Aus (11') und (11) folgt noch

$$\psi_{\mu+1}(x) = 0\left(\omega^{-\frac{\mu+1}{2}}\right). \qquad (14)$$

Wir gehen jetzt auf I_1 zurück und setzen $M(x) = L(x-a)$, $q(x) = p(x-a)$. Dann ist

$$f(a) = p(a) = q(0), M^{(j)}(0) = L^{(j)}(a) = g^{(j)}(a), M^{(j)}(\varepsilon) = L^{(j)}(a+\varepsilon) = 0 \qquad (14')$$

und nach (10) $L^{(j)}(x) = 0\left(\omega^{\frac{i}{3}}\right)$.

Dann erhalten wir

$f(a) = p(a) = q(0)$, $M^{(j)}(0) = L^{(j)}(a)$, $M^{(j)}(\varepsilon) = L^{(j)}(a+\varepsilon)$ und nach (10) $L^{(j)}(x) = 0\left(\omega^{\frac{j}{3}}\right)$.

Dann folgt durch partielle Integration

$$I_1 = \int_0^{\varepsilon} M\, e^{i\omega q}\, dx = \int_0^{\varepsilon} M\, \psi_0\, dx = M(0)\,\psi_1(0) + \int_0^{\varepsilon} M'\,\psi_1\, dx =$$

$$= \sum_{s=0}^{K} L^{(s)}(a)\,\psi_{s+1}(0) + \int_0^{\varepsilon} M^{(K+1)}\,\psi_{K+1}\, dx \tag{15}$$

wo $K = 3(k+1)$. Es ist

$$\int_0^{\varepsilon} M^{(K+1)}\,\psi_{K+1}\, dx = 0\ (\omega^{\frac{K+1}{3}})\ \ 0\ \ (\omega^{-\frac{K+1}{2}})\ \varepsilon = 0\ (\omega^{-\frac{k}{2}-1})$$

Nun muß $L^{(s)}(a)$ betrachtet werden. Setzen wir für die n-te Ableitung von $e^{i\omega(t-p)}$ an der Stelle a, P_n, dann ist $P_0 = 1$, $P_1 = P_2 = 0$ und es ist (vgl. den Beweis von (9))

$$P_{n+1} = i\omega \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n}{r} P_r\, f^{(n-r+1)}(a) \tag{16}$$

Die P_n sind also Polynome in $i\omega$, und zwar nach (9) vom Grad $\left[\frac{n}{3}\right]$. Wir setzen daher $P_n = \sum_{t=0}^{n} K_{tn}\,(i\omega)^t$ mit $K_{00} = 1$, $K_{0n} = 0$ für $n \geqq 1$ und $K_{tn} = 0$, wenn $t > \left[\frac{n}{3}\right]$. Dann folgt aus (16)

$$K_{t+1,\,n+1} = \sum_{r=3t}^{n-2} \binom{n}{r} f^{(n-r+1)}(a)\, K_{t\,r} \tag{17}$$

also z. B. $K_{1n} = f^{(n)}(a)$. Weiter ist

$$L^{(s)}(a) = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} g^{(s-n)}(a)\, P_n = \sum_{t=0}^{s} (i\omega)^t\, l_{ts} \text{ wo}$$

$$l_{ts} = \sum_{n=3t}^{s} \binom{s}{n} g^{(s-n)}(a)\, K_{tn} \tag{18}$$

also $l_{ts} = 0$ für $t > \frac{s}{3}$ und $l_{0s} = g^{(s)}(a)$.

Jetzt betrachten wir die Summe rechts in (15), wobei wir $\psi_{j+1}(0) = \Psi_{j+1}\,\omega^{-\frac{j+1}{2}}$ setzen, welche sich jetzt wegen (18) schreibt:

$$\sum_{s=0}^{K} \sum_{t=0}^{s} i^t\, \omega^{t-\frac{s+1}{2}}\, l_{ts}\, \Psi_{s+1} \tag{19}$$

Wir ordnen nach Potenzen von $\omega^{-\frac{1}{2}}$. Um den Koeffizienten A_j der $j+1$-ten Potenz zu erhalten ($j \geqq 0$) müssen wir alle Glieder in (19) nehmen, wo $s - 2t = j$ ist und erhalten daher $A_j = \sum_{t=0}^{j} i^t\, l_{t,\,j+2t}$

Ψ_{j+2t+1}, da für $t > j$, $l_{i,\,j+2t} = 0$. Dieser Ausdruck ist aber gerade der in (17) angegebene. Behalten wir in (19) nur die Potenzen mit $j \leqq k$ bei, so bekommen wir gerade $\Sigma_k(a)$, es ist also

$$I_1 = \Sigma_k(a) + 0\,(\omega^{-\frac{k}{2}-1}).$$

Bei dem Integral $\int_{b-\varepsilon}^{b} N_b\, g e^{i\omega f}\, dx$ geht man analog vor. Es ist nur $\psi_{\mu+1}$ zu ersetzen durch

$$\frac{1}{\mu!} \int_x^\infty (\zeta - x)^\mu\, e^{i\omega(f(b) - \frac{1}{2} f''(b)\,\xi^2)} \frac{\partial \zeta}{\partial t}\, dt$$

wo $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{4}} \left(t + \frac{x^2}{t}\, i\right)$. Beachtet man noch (7'), so ist alles gezeigt.

§ 3.

Es sei im R_m ($m \geqq 2$) B ein konvexer Körper, der den Koordinatenursprung o im Innern enthält. Der Rand $S(B)$ von B sei durch gleichsinnig parallele Stützebenen umkehrbar eindeutig und $6\,m$-mal stetig differenzierbar auf die Einheitskugeloberfläche abgebildet. Die Distanzfunktion $f(x)$ und Stützfunktion $H(u)$ ($|u| = 1$) sind also für $x \neq 0$, $u \neq 0$ $6\,m$-mal stetig differenzierbar. B selbst habe die Darstellung $f(x) \leqq 1$. Die Ableitungen von H nach den u_i, wo $u = (u_1, \ldots, u_m)$ sind, wenn ihre Ordnung $\leqq 6\,m$, auf der Kugel $|u| = 1$ gleichmäßig beschränkt, da sie stetig sind. Weiters ist $\inf H(u) > 0$ auf $|u| = 1$, da o innerer Punkt von B ist. Ist nun $K = r_1 \ldots r_{m-1}$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien r_i von $S(B)$, so machen wir die folgende Voraussetzung

$$\inf K = \varrho > 0 \text{ auf } S(B) \tag{1}$$

Man vergleiche zum Folgenden stets *Bonnesen-Fenchel*, Konvexe Körper (kurz *B. F.*).

Es soll nun

$$G = \int_B e^{i\omega x_1}\, dx, \text{ bzw. } G_1 = \int_B (m + i\omega x_1)\, e^{i\omega x_1}\, dx \tag{2}$$

für $\omega \geqq 1$ asymptotisch entwickelt werden.

Da sich der Rand von B auf $|u| = 1$ abbilden läßt, so ist auch K eine Funktion von u. Dann gilt für $k \leqq m + 3$

Satz 2: Es ist

$$G = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}}\left[e^{i\omega H_1}\sum_{j=0}^{k}\frac{a_j}{\omega^{\frac{j}{2}}} + e^{-i\omega H_{-1}}\sum_{j=0}^{k}\frac{b_j}{\omega^{\frac{j}{2}}}\right] + 0\left(\omega^{-\frac{m+k}{2}-1}\right) \tag{3}$$

wo

$$H_{\pm 1} = H(\pm 1, 0, \ldots 0),\ K_{\pm 1} = K(\pm 1, 0, \ldots 0),$$

$$a_0 = \sqrt{K_1}\, e^{-i\frac{(m+1)\pi}{4}}\ b_0 = \sqrt{K_{-1}}\, e^{i\frac{(m+1)\pi}{4}} \tag{4}$$

$$G_1 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{\frac{m-1}{2}}\left[e^{i\omega H_1}\sum_{j=0}^{k}\frac{a'_j}{\omega^{\frac{j}{2}}} + e^{-i\omega H_{-1}}\sum_{j=0}^{k}\frac{b'_j}{\omega^{\frac{j}{2}}}\right] + 0\left(\omega^{-\frac{m+k}{2}}\right) \tag{5}$$

wo

$$a_0' = H_1\sqrt{K_1}\, e^{-\frac{(m-1)\pi}{4}},\ b_0' = H_{-1}\sqrt{K_{-1}}\, e^{i\frac{(m-1)\pi}{4}} \tag{6}$$

Zuerst schicken wir einen einfachen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 2: Es sei $Q = \sum_{i,k=1}^{s} A_{ik}\, l_i\, l_k$ eine positiv-definite Form. Es sei $D = \mathrm{Det}\, A_{ik}$ und $C = \mathrm{Max}_{i,k}\, A_{ik}$. Dann ist für alle $(l_1, \ldots, l_s)$ mit $\Sigma\, l_i^2 = 1$

$$Q \geqq \frac{D}{(s\,C)^s} \tag{7}$$

Beweis: Die Eigenwerte von Q seien $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_s$. Dann ist für alle $(l_1, \ldots l_s)$ mit $\Sigma\, l_i^2 = 1$

$$Q \geqq \lambda_1 = \frac{\lambda_1 \ldots \lambda_s}{\lambda_2 \ldots \lambda_s} \geqq \frac{D}{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_s)^s} \geqq \frac{D}{(s\,C)^s}$$

da $\lambda_1 + \ldots + \lambda_s = A_{1\,1} + \ldots + A_{s\,s} \leqq s\,C$ w. z. b. w.

Beweis von Satz 2: Nach dem *Gauß*schen Integralsatz ist

$$G = \frac{1}{\omega\, i}\int_{S(B)} e^{i\omega x_1}\ u_1\ do. \tag{8}$$

Dabei ist do das Oberflächenelement von $S(B)$ und u_1 die erste Komponente des normierten, nach außen gerichteten Normalenvektors u im Punkt $x = (x_1 \ldots x_m)$. Es sei gleich $m > 2$. Es ist nun x auf $S(B)$ eine Funktion von u, da $S(B)$ auf $|u| = 1$ abgebildet ist. Es ist weiter $do = K\, d\sigma$, wo $d\sigma$ das Oberflächenelement von $E_m : |u| = 1$ (vgl.

B. F. S. 63, Z. 6 v. u.) ist. Weiters sei $d\bar{\sigma}$ das Oberflächenelement der m — 1-dimensionalen Einheitskugel E_{m-1}. Wir setzen nun

$$u_1 = \cos\vartheta,\ u_j = \sin\vartheta\, a_j\ (j \geqq 2),\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi,\ \sum_{j=2}^{m} a_j^2 = 1 \tag{9}$$

Dann folgt aus (8)

$$i\omega G = \int_{E_{m-1}} d\bar{\sigma} \int_0^{\pi} e^{i\omega x_1} K \cos\vartheta \sin^{m-2}\vartheta\, d\vartheta \tag{10}$$

Wir halten zunächst $a_2, \ldots a_m$ fest und betrachten nur das innere Integral in (10).

Es ist nun nach *B. F.* S. 58 (1) $x_1 = \dfrac{\partial H}{\partial u_1}$, also

$$\frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \sin\vartheta + \cos\vartheta \sum_{i=2}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_i} a_i \tag{11}$$

Nun gilt nach *B. F.* S. 59, Z. 1 v. u. wegen der Homogenität von H

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = H,\ \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} = 0\ (j = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

Daraus folgt zunächst

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}(\pm 1, 0, 0 \ldots 0) = \pm H(\pm 1, 0, \ldots 0),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_j}\ (\pm 1, 0 \ldots 0) = 0 \tag{13}$$

und weiter

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_i} \cos\vartheta = \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_i} u_1 = -\sum_{k=2}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2 \partial u_k} u_k,$$

also folgt aus (11)

$$\frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} = -\sin\vartheta\, F(\vartheta, a_i) \tag{14}$$

wo

$$F(\vartheta, a_i) = \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} + \sum_{i,k=2}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_k} a_i a_k \ (\sum_{i=2}^{m} a_i^2 = 1) \tag{15}$$

Es ist nun nach *B. F.* S. 62 (5) K die Summe aller m — 1-reihigen Hauptminoren h der Matrix $(H_{ik}) = (\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_k})$. Nun ist nach (1)

$\inf K = \varrho > 0$, also $K \geqq \varrho$ auf $|u| = 1$. Es muß also einer der Hauptminoren $h \geqq \frac{1}{m}\varrho > 0$ sein. Dann kann die quadratische Form $Q(z)$ in den Variablen z, deren Koeffizienten von den Elementen dieses Hauptminors gebildet werden, sicher nicht ausgeartet sein. Nun ist H konvex, also nach *B. F.* S. 18, Z. 1 v. u. $\sum_{i,k=1}^{m} H_{ik} z_i z_k \geqq 0$, also muß das obige Q sogar positiv-definit sein. Nun sind nach Voraussetzung die H_{ik} auf $|u| = 1$ beschränkt, also $\leqq C$.

Dann gilt nach Hilfssatz 2

$$Q(z) \geqq \frac{\varrho}{(m-1)\,(mC)^{m-1}} = \varrho_1 \tag{16}$$

auf der $m-1$-dimensionalen Einheitskugel, da $s = m-1$. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden

1. Es sei Q gerade die Form $\sum_{i,k=2}^{m} H_{ik} z_i z_k$, dann ist, da $H_{11} \geqq 0$

$$F \geqq \varrho_1 \tag{17}$$

für alle $a_2, \ldots, a_m$ mit $\Sigma a_i^2 = 1$.

2. Ist das obige Q nicht von dieser Gestalt, so muß H_{11} als ein Koeffizient in Q auftreten und es ist dann wegen (16) $H_{11} \geqq \varrho_1$, also gilt wieder (17).

Es besitzt also nach (14) $\frac{\partial x_1}{\partial \vartheta}$ nur die Nullstellen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, d. h. für $u = (1, 0 \ldots 0)$ und $u = (-1, 0, \ldots, 0)$.

Weiters ist

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \vartheta^2}\Big|_0 = -F(0, a_i) \leqq -\varrho_1 < 0, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \vartheta^2}\Big|_\pi = F(\pi, a_i) \geqq \varrho_1 > 0$$

wo ϱ_1 von den a_i nicht abhängt.

Wir können also Hilfssatz 1 aus § 2 anwenden mit $a = 0$, $b = \pi$, $f(\vartheta) = \omega_1$, $g = K \sin^{m-2}\vartheta \cos\vartheta$. In $\vartheta = 0$, bzw. $\vartheta = \pi$ besitzt g die Entwicklungen

$$g(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta^{m-2}\left[K_1 + \left(\frac{\partial K}{\partial \vartheta}\right)_0 \vartheta + \ldots\right] \\ -(\pi - \vartheta)^{m-2}\left[K_{-1} + \left(\frac{\partial K}{\partial \vartheta}\right)_\pi (\pi - \vartheta) + \ldots\right], \end{cases}$$

also

$g^{(j)}(\vartheta) = 0$ für $\vartheta = 0$ und π $(0 \leqq j \leqq m-2)$, $g^{(m-2)}(0) = (m-2)!\, K_1$,

$$g^{(m-2)}(\pi) = (-1)^{m-1}(m-2)!\, K_{-1}. \tag{19}$$

Setzen wir noch $F(0, a_i) = F_1$, $F(\pi, a_i) = F_{-1}$, so ist also

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} e^{i\omega x_1} K \cos\vartheta \sin^{m-2}\vartheta \, d\vartheta \\
&= \tfrac{1}{2} e^{i\omega x_1(1,0,\ldots,0)} \sum_{j=m-2}^{k+m-2} A_j e^{-\frac{i(j+1)}{4}} \omega^{-\frac{j+1}{2}} \\
&+ \tfrac{1}{2} e^{i\omega x_1(-1,0,\ldots,0)} \sum_{j=m-2}^{k+m-2} (-1)^j B_j e^{\frac{i(j+1)\pi}{4}} \omega^{-\frac{j+1}{2}} + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{m+k}{2}}}\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

Dabei gilt $0\,(\omega^{-\frac{m+k}{2}})$ gleichmäßig in den a_i.

Daraus folgt, wenn wir beachten, daß $x_1(\pm 1, 0 \ldots 0) = \dfrac{\partial H}{\partial u_1}(\pm 1, 0 \ldots 0) = \pm H_{\pm 1}$ nach (13),

$$i\omega G = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j^* e^{i\omega H_1} + b_j^* e^{-i\omega H_{-1}}}{\omega^{\frac{j}{2}}} + 0\,(\omega^{-\frac{m+k}{2}}). \tag{21}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
a_0^* &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{2(m-2)!}\, 2^{\frac{m-1}{2}}\, e^{-\frac{i(m-1)\pi}{4}} \int_{E_{m-1}} \frac{g^{(m-2)}(0)}{F_0^{\frac{m-1}{2}}}\, d\bar{\sigma} \\
b_0^* &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{2(m-2)!} (-1)^{m-2} 2^{\frac{m-1}{2}}\, e^{\frac{i(m-1)\pi}{4}} \int_{E_{m-1}} \frac{g^{(m-2)}(\pi)}{F_0^{\frac{m-1}{2}}}\, d\bar{\sigma}
\end{aligned} \tag{22}$$

Es soll nun a_0^* und b_0^* bestimmt werden. Nach (13) ist $F(0, a_2, \ldots a_m) = \sum_{i,j=2}^{m} H_{ik}(1, 0 \ldots 0)\, a_i a_k$. Wegen (9) haben wir nur $\int_{E_{m-1}} \dfrac{d\bar{\sigma}}{F_1^{\frac{m-1}{2}}}$ zu berechnen. Durch eine orthogonale Transformation können wir F_1 überführen in $\sum_{i=2}^{m} \lambda_i a_i^2$ $(\lambda_i > 0)$. Dabei ist $\lambda_2 \ldots \lambda_m = K_1 = K(1, 0, \ldots, 0)$, da die Hauptminoren von (H_{ik}) für $(1, 0 \ldots 0)$ verschwinden bis auf Det. H_{ik} $(2 \leqq i, k \leqq m)$.

Wir gehen nun von dem absolutkonvergenten Integral

$$I = \int_{R_{m-1}} e^{-\sum_{i=2}^{m} \lambda_j x_j^2} d x_2 \dots d x_m \tag{23}$$

aus. Es ist einerseits

$$I = \prod_{i=2}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_i x_i^2} d x_i = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{\lambda_2 \dots \lambda_m}} = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{K_1}}$$

Führen wir andererseits in I Polarkoordinaten ein: $x_j = r a_j$ $(j = 2, \dots m)$, $\Sigma a_j^2 = 1$, so kommt

$$I = \int_0^{\infty} r^{m-2} d r \int_{E_{m-1}} e^{-r^2 \sum_{i=2}^{m} \lambda_i x_i^2} d \bar{\sigma} = \tfrac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \int_{E_{m-1}} \frac{d \bar{\sigma}}{(\Sigma \lambda_i x_i^2)^{\frac{m-1}{2}}},$$

also erhalten wir wegen (19) aus (22)

$$a_0^* = \sqrt{K_1}\ e^{-i\frac{(m-1)\pi}{4}},\ b_0^* = -\sqrt{K_{-1}} e^{i\frac{(m-1)\pi}{4}}.$$

Damit erhalten wir für G (3) und (4), wenn wir $a_i = -i a_i^*$, $b_i = i b_i^*$ setzen. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Bei G_1 gehen wir analog vor. Es ist nach dem *Gauß*schen Integralsatz

$$G_1 = \frac{1}{i \omega} \int_S e^{i \omega x_1} (m - 1 + i \omega x_1) u_1 d o \tag{24}$$

Man braucht also nur $G_3 = \int_S u_1 x_1 e^{i \omega x_1} d o$ zu betrachten und erhält dann (5) und (6).

Man stellt sofort fest, daß der Satz und sein Beweis auch für $m = 2$ gilt, wenn man in (10) unter $\int_{E_{m-1}} d \sigma$ die Zahl 2 versteht.

Bemerkung: Betrachtet man das Integral $G_4^{\pm} = \int_B e^{\pm \omega x_1} d x$, so zeigt eine ganz analoge Rechnung, wo statt Hilfssatz 1 aus § 2 die *Laplace*sche Methode zu verwenden ist, daß

$$G_4^{\pm} \sim \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \sqrt{K(\pm 1, 0 \dots 0)}\ e^{\omega H(\mp 1, 0, \dots 0)}, (\omega \to \infty) \tag{25}$$

§ 4.

Es soll nun mittels Satz 1 und Satz 2

$$I_\delta = \int_B (1 - f^2)^\delta e^{i \omega x_1} d x \tag{1}$$

für $\delta \geqq 0$ asymptotisch dargestellt werden. Über B mögen wieder dieselben Voraussetzungen wie in § 3 gelten. Insbesondere ist $B: f(x) \leqq 1$. Dann gilt:

Satz 3:

$$I_\delta = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} 2^\delta \Gamma(\delta+1)}{\omega^{\frac{m+1}{2}+\delta}} \left[\frac{\sqrt{K_1}}{H_1^\delta} e^{i\omega H_1 - \frac{i\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2})} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{K_{-1}}}{H_{-1}^\delta} e^{-i\omega H_{-1} + \frac{i\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2})} \right] + 0\left(\omega^{-\frac{m}{2}-\delta-1}\right) + 0\left(\omega^{-m-2}\right) \tag{2}$$

Dabei ist $H_{\pm 1}, = H(\pm 1, 0, \ldots 0)$, ebenso ist $K_{\pm 1}$ erklärt (wie in § 3). Die Abschätzungen gelten in δ gleichmäßig in jedem Intervall $[0, \delta_0]$.

Unter stärkeren Voraussetzungen kann in (2) das zweite Fehlerglied weggelassen werden. Dies wird in der Fortsetzung dieser Arbeit gezeigt werden, wo die Integrale (1) nach einer anderen Methode behandelt werden.

Beweis: Für $\delta = 0$ wurde (2) bereits in § 3 Satz 2 bewiesen, da $I_0 = G$. Es kann also $\delta > 0$ vorausgesetzt werden. Nach § 1 (3) ist für $\delta > 0$

$$I_\delta = 2\delta \int_0^1 (1-u^2)^{\delta-1} u^{m+1} G(u)\, du, \tag{3}$$

wo $G(u) = \int_B e^{iu\omega x_1}\, dx$. Da $|G| \leqq V(B)$ (Volumen von B), so ist $\int_0^{\frac{1}{\omega}} (1-u^2)^{\delta-1} u^{m+1} G(u)\, du = 0(\omega^{-(m+2)})$ Wir erhalten weiter, wenn wir § 3 (3) mit $k = m+3$ verwenden.

$$I_\delta = 2\delta\, 0\left(\frac{1}{\omega^{m+2}}\right) + \frac{2\delta(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \int_{\frac{1}{\omega}}^1 (1-u^2)^{\delta-1} u^{\frac{m+1}{2}}\, du$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m+3} \frac{a_j e^{i\omega u H_1} + b_j e^{-i\omega u H_{-1}}}{(u\omega)^{\frac{j}{2}}} \right) + 0\left(\frac{2\delta}{\omega^{m+\frac{5}{2}}} \int_{\frac{1}{\omega}}^1 (1-u^2)^{\delta-1} u^{-\frac{3}{2}} du \right) \tag{4}$$

Der letzte 0-Term in (4) ist $0\left(\frac{\delta+1}{\omega^{m+2}}\right)$, denn es ist

$$\int_{\omega^{-1}}^1 (1-u^2)^{\delta-1} u^{-\frac{3}{2}}\, du = \int_{\omega^{-1}}^{1/2} + \int_{1/2}^1 \leqq {}^4/_3 \sqrt{\omega} + \frac{2\sqrt{2}}{\delta}.$$

Wir haben nun weiter die Integrale

$$I_{\pm} = 2\,\delta \int_0^1 (1-u^2)^{\delta-1}\, u^{\frac{l}{2}}\, e^{\pm i\omega u H \pm 1}\, du$$

zu betrachten, wo $l = m+1-j$, $0 \leqq j \leqq m+3$. Wir beschränken uns auf I_+ und setzen $u = 1-v$, dann kommt

$$I_t = 2^{\delta}\,\delta\, e^{i\omega H_1} \int_0^{1-\frac{1}{\omega}} v^{\delta-1}\,(1-\frac{v}{2})^{\delta-1}\,(1-v)^{\frac{l}{2}}\, e^{-i\omega H_1 v}\, dv. \qquad (5)$$

Wir betrachten nun in der komplexen v-Ebene den Bereich begrenzt durch die Strecke $v = t$ $(0 \leqq t \leqq 1-\frac{1}{\omega})$ auf der positiven reellen Achse, durch $v = t\, e^{-\frac{i\pi}{2}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ auf der negativ-imaginären Achse und den Viertelkreis $V : v = (1-\frac{1}{\omega})\, e^{-it}\,(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$. Außerdem ist der Punkt $v = 0$ durch einen Kreisbogen $V\varrho$ vom Radius ϱ $(\varrho > 0)$ um diesen Punkt auszuschließen. In den so begrenzten Bereich ist der Integrand von (5) eindeutig und regulär, also das Integral über den Rand dieses Bereichs 0. Man sieht sofort, daß $\lim_{\varrho \to 0} \int_{v\varrho} = 0$.

Wir erhalten also

$$\int_0^{1-\frac{1}{\omega}} = e^{-\frac{i\pi}{2}\delta} \int_0^{1-\omega^{-1}} t^{\delta-1}\,(1+\frac{t}{2}\,i)^{\delta-1}\,(1+it)^{\frac{l}{2}}\, e^{-\omega H_1 t}\, dt + \int_v. \qquad (6)$$

Nun ist

$$\left|\int_v\right| \leqq (1-\frac{1}{\omega})^{\delta}\; 5\; (\frac{8}{5})^{\delta-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|1-(1-\frac{1}{\omega})\, e^{-it}\right|^{\frac{l}{2}} e^{-\omega H_1 \sin t}\, dt.$$ Da

$$\frac{1}{\omega^2} \leqq \left|1-(1-\frac{1}{\omega})\, e^{-it}\right|^2 = 1+(1-\frac{1}{\omega})^2 - 2\,(1-\frac{1}{\omega})\cos t \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\omega^2} + t^2 \qquad (7)$$

wegen $\cos t \geqq 1 - \frac{t^2}{2}$, so ist

$$\left|\int_v\right| \leqq 5\,(\frac{8}{5})^{\delta-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{\omega^2} + C\,.\,t^2)^{\frac{l}{4}}\, e^{-\omega H_1 \sin t}\, dt \leqq 5\,(\frac{8}{5})^{\delta-1}$$

$$\int_0^{\infty} (\frac{1}{\omega^2} + C\,t^2)^{\frac{l}{4}}\, e^{-\frac{2}{\pi}\omega H_1 t}\, dt$$

wo C zwischen 0 und 1 liegt. Wir setzen nun $t = \frac{\tau}{\omega}$ und erhalten

$|\int_v| \leqq \frac{25 c^{\delta}}{8\omega^{\frac{l}{2}+1}} \int_0^{\infty} (1 + C\tau^2)^{\frac{l}{4}} e^{-\frac{2}{\pi} H_1 t} \, dt = 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{l}{2}+1}}\right)$. Dabei wurde $c = \frac{8}{5}$ gesetzt und benutzt, daß H auf $|u| = 1$ nach unten beschränkt ist.

Nun betrachten wir das Integral rechts in (6). Entwickeln wir $(1 + \frac{t}{2} i)^{\delta-1} (1 + t i)^{\frac{l}{2}}$ bis zur ersten Potenz in t, so erhalten wir

$$e^{\frac{i\pi}{2}\delta} \int_0^{1-\frac{1}{\omega}} = \int_0^{1-\frac{1}{\omega}} t^{\delta-1} e^{-\omega H_1 t} \, dt + 0\left(\int_0^{1-\frac{1}{\omega}} t^{\delta} e^{-\omega H_1 t} \, dt\right) + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{l}{2}+1}}\right) \tag{8}$$

Nun ist für $\gamma \geqq 0$, $\int_0^{1-\frac{1}{\omega}} t^{\gamma-1} e^{-\omega H_1 t} \, dt = \int_0^{\infty} - \int_{1-\frac{1}{\omega}}^{\infty}$. Nun ist

$$\int_{1-\frac{1}{\omega}}^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-\omega H_1 t} \, dt \leqq \frac{1}{(\omega H_1)^{\gamma}} \int_{\omega H_1}^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-t} \, dt \leqq \frac{1}{(\omega H_1)^{\gamma+1}} \int_0^{\infty} t^{\gamma} e^{-t} \, dt.$$

Es ist also

$$\int_0^{1-\frac{1}{\omega}} t^{\gamma-1} e^{-\omega H_1 t} \, dt = \frac{\Gamma(\gamma)}{(\omega H_1)^{\gamma}} + 0\left(\frac{1}{(\omega H_1)^{\gamma+1}}\right).$$

Wenden wir dies für $\gamma = \delta$ und $\delta + 1$ an, so erhalten wir

$$e^{\frac{i\pi}{2}\delta} \int_0^{1-\frac{1}{\omega}} = \frac{\Gamma(\delta)}{(\omega H_1)^{\delta}} + 0\left(\frac{1}{(\omega H_1)^{\delta+1}}\right) + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{l}{2}+1}}\right) \tag{9}$$

also

$$I_{\pm} = \frac{2^{\delta}\Gamma(\delta+1) e^{\pm i\omega H \pm 1}}{(\omega H_{\pm 1})^{\delta}} \left(1 + 0\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{l}{2}+1}}\right) \tag{10}$$

Bei I_- ist einfach der Bereich in der komplexen v-Ebene zu nehmen, der aus dem bei I_+ verwendeten durch Spiegelung an der reellen Achse entsteht. Setzen wir dies alles in (4) ein, so kommt

$$I_\delta = \frac{2^\delta \Gamma(\delta+1)(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \sum_{j=0}^{m+3} \frac{1}{\omega^{\delta+\frac{j}{2}}} \left(\frac{a_j e^{i(\omega H_1 - \frac{\pi}{2}\delta)}}{H_1^{\delta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{b_j e^{-i(\omega H_{-1} - \frac{\pi}{2}\delta)}}{H_{-1}^{\delta}} \right) + \frac{1}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \sum_{j=0}^{m+3} 0\left(\frac{1}{\omega^{\delta+1+\frac{j}{2}}}\right) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m+3} 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{j}{2}+\frac{m+1-j}{2}+1}}\right) + 0\left(\frac{1}{\omega^{m+2}}\right) \tag{11}$$

Die Glieder in der Summe für $j \geqq 1$ und der erste 0-Term sind $0\left(\frac{1}{\omega^{\delta+\frac{1}{2}}}\right)$, der zweite 0-Term ist $0\left(\frac{1}{\omega^{m+2}}\right)$. Setzt man für a_0 und b_0 ihre Werte nach § 3 (4) ein, so erhält man (2) w. z. b. w.

Man kann mittels der Sätze 1 und 2 auch asymptotische Entwicklungen für $\int_D \Phi(f)\, e^{i\omega x_1}\, dx$ aufstellen, wenn $\Phi(u)$ genügend oft differenzierbar ist. Wir beschränken uns, um ein Beispiel zu geben, auf den Fall, daß $\Phi(1) \neq 0$ ist. Dann gilt

Satz 4

$$I = \int_B \Phi(f)\, e^{i\omega x_1}\, dx = \Phi(1) \int_B e^{i\omega x_1}\, dx + 0(\omega^{-\frac{m}{2}-1}) \tag{12}$$

wenn $\Phi(u)$ mindestens zweimal differenzierbar ist.

Beweis: Aus § 1 (1) folgt durch partielle Integration

$$I = \Phi(1)\, G(1) - \int_0^1 \Phi'(u)\, u^m\, G(u)\, du. \tag{13}$$

Dann folgt aus § 3 (3) mit $k = 0$, wenn wir beachten, daß

$$\int_0^{\omega^{-\frac{1}{2}}} \Phi'(u)\, u^m\, G(u)\, du = 0(\omega^{-\frac{m}{2}-1}),$$

$$\int_0^1 \Phi'(u)\, u^m\, G(u)\, du = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} \left[a_0 \int_{\omega^{-\frac{1}{2}}}^1 \Phi'(u)\, u^{\frac{m-1}{2}}\, e^{i\omega u H_1}\, du + \right.$$

$$+ b_0 \int_{\omega^{-\frac{1}{2}}}^{1} \Phi'(u)\, u^{\frac{m-1}{2}}\, e^{-i\omega u H_1}\, du] + 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{m}{2}+1}}\right) \int_{\omega^{-\frac{1}{2}}}^{1} \Phi'(u)\, u^{\frac{m}{2}-1}\, du)$$

$$+ 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{m}{2}+1}}\right) = 0\left(\frac{1}{\omega^{\frac{m}{2}+1}}\right),$$

da $m \geqq 2$. Man sieht die Abschätzung ein, wenn man die auftretenden Integrale partiell integriert. Damit ist bereits alles gezeigt.

§ 5.

Bis jetzt wurden nur Integrale von der Gestalt $\int_B \Phi(f)\, e^{i\omega x_1}\, dx$ betrachtet. Für die Anwendungen benötigen wir aber Integrale von der allgemeinen Gestalt $\int_{B_t} \Phi(f)\, e^{il x}\, dx$, wo $B_t : f(x) \leqq t$ für großes $|l|\, t$, insbesondere für $\Phi(f) = (t^2 - f^2)^\delta$ $(\delta \geqq 0)$. Wir wollen uns gleich auf diese, also auf

$$I_\delta = \int_{f \leqq t} (t^2 - f^2)^\delta\, e^{ilx}\, dx \quad (\delta \geqq 0) \tag{1}$$

beschränken. Dabei ist $B_1 = B : f \leqq 1$. Für B mögen wieder die Voraussetzungen von § 3 gelten. Wir können schreiben

$$I_\delta = t^{2\delta+m} \int_B (1 - f^2)^\delta\, e^{it|l|\, e_l x}\, dx, \text{ wo } e_l = \frac{l}{|l|}.$$

Durch eine orthogonale Drehung A können wir erreichen, daß e_l übergeht in $(1, 0, \ldots 0)$. Dabei geht B über in $B' = A\,B$ und es wird

$$I_\delta = t^{2\delta+m} \int_B (1 - f'^2(x))^\delta\, e^{it|l|\, x_1}\, dx, \tag{2}$$

wo f' Distanzfunktion von B'. Jetzt können wir mit $\omega = t\,|l|$ auf (2) Satz 3, § 4 anwenden. Dies ist möglich, da B' dieselben Voraussetzungen wie B erfüllt. Denn zunächst ist inf K auf $|u| = 1$ eine Drehinvariante, also auch inf K'. Weiter sind alle 6 m Ableitungen von H', wo H' Stützfunktion von B', beschränkt, denn diese sind Linearkomposita in den Ableitungen von H mit Koeffizienten, welche Produkte der Elemente von A sind. Da A orthogonal, so sind diese Produkte und damit auch die Ableitungen von H' beschränkt. Machen wir nun die Drehung wieder rückgängig, so ist in (2) überall der Vektor $(1, 0, \ldots 0)$ durch e_j zu ersetzen und wir erhalten also

Satz 5: Es ist für $\delta \geqq 0$

$$\int\limits_{(x)\leqq t} (t^2 - f^2(x))^\delta e^{i l x}\, dx = \frac{(2\pi t)^{\frac{m-1}{2}} (2t)^\delta \Gamma(\delta+1)}{|l|^{\frac{m+1}{2}+\delta}} [C_1 e^{i|l|tH(e_l)-\alpha} +$$

$$+ C_2 e^{-i|l|tH(e_l)+\alpha}] + 0\left(\frac{t^{\frac{m}{2}+\delta-1}}{|l|^{\frac{m}{2}+\delta+1}}\right) + 0\left(\frac{t^{2\delta-2}}{|l|^{m+2}}\right) \qquad (3)$$

Dabei ist

$$e_l = \frac{l}{|l|},\ \alpha = \frac{i\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2}),\ C_1 = \frac{\sqrt{K(e_l)}}{(H(e_l))^\delta},\ C_2 = \frac{\sqrt{K(-e_l)}}{(H(-e_l))^\delta} \qquad (3')$$

Die Abschätzung ist gleichmäßig in δ in jedem Intervall $[0, \delta_0]$. Ist insbesondere B symmetrisch mit o als Mittelpunkt, so ist das Hauptglied in (3), wenn $t = 1$

$$2\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} 2^\delta \Gamma(\delta+1)}{|l|^{\frac{m+1}{2}+\delta}} \frac{\sqrt{K(e_l)}}{(H(e_l))^\delta} \cos\left(|l| H(e_l) - \frac{\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2})\right) \qquad (3'')$$

Dies ist für die Kugel wohlbekannt, da $I_\delta = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \frac{J_{\frac{m}{2}+\delta}(|l|)}{|l|^{\frac{m}{2}+\delta}}$

ist, wo J rechts die *Bessel*sche Funktion 1. Art ist. Hier kann das Restglied bedeutend schärfer angegeben werden. Für das Integral $G_4(\pm l) = \int\limits_B e^{\pm l x}\, dx$ erhält man mittels § 3 (25)

$$G_4(\pm l) = \int\limits_B e^{\pm l x}\, dx \sim \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{|l|^{\frac{m+1}{2}}} \sqrt{K(\pm e_l)}\ e^{|l| H(\pm e_l)} \qquad (4)$$

Daraus folgt

$$\overline{\lim_{|l|\to\infty}} \frac{\ln G_4(\pm l)}{|l|} = H(\pm l) \qquad (5)$$

Dies steht mit den allgemeinen Untersuchungen von *Plancherel-Polya*[6] in Einklang. Dort wird (5) für beliebige konvexe Körper bewiesen.

Es sollen noch Abschätzungen für $G = \int\limits_B e^{i\omega x_1}\, dx$ und $G_1 = \int\limits_B e^{i\omega x_1}(m + i\omega x_1)\, dx$ gegeben werden, die auch dann gelten, wenn nur auf B der *Gauß*sche Integralsatz anwendbar ist.

[6] Commentarii Helvetici 9.

Satz 6: Es ist, wenn $\omega \neq 0$

$$|G| \leqq \frac{S(B)}{|\omega|}, \; |G_1| \leqq C(B) \tag{6}$$

Dabei ist $S(B)$ die Oberfläche von B und $C(B)$ eine Konstante, die nur von B abhängt.

Beweis: Die Abschätzung von G folgt sofort aus § 3 (8). Bei G_1 sieht man dies so: Für $|\omega| \leqq 1$ ist

$$|G_1| \leqq \int_B (m + |x_1|)\, dx = C_1(B).$$

Ist $|\omega| \geqq 1$, so folgt aus § 3 (24)

$$|G_1| \leqq (m-1)\, S(B) + \int_{S(B)} |x_1|\, do = C_2(B) \text{ w.z.b.w.}$$

§ 6.

Es sei wieder B_t der Bereich $f(x) \leqq t$, $B_1 = B$ ist dann der Eichkörper. Sein Volumen bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}$. Weiter sei A eine Matrix mit Det. $A = 1$. $\varphi(x)$ sei eine integrierbare Funktion auf B_t, die außerhalb B_t verschwindet und c eine Zahl > 0.

Mit g, bzw. l sollen im folgenden stets Gitterpunkte des R_m bezeichnet werden.

Wir bilden uns die in g periodische Funktion

$$\Phi(x) = \sum_g \varphi(c\, A\, (g - x)) \tag{1}$$

und entwickeln sie formal in eine Fouriersche Reihe

$$\Phi(x) \sim \sum_l a_l e^{2\pi i l x} \tag{2}$$

Ist E der Würfel $0 \leqq x_i \leqq 1 \quad (i = 1, \ldots m)$, so ist

$$a_l = \int_E \Phi(x)\, e^{-2\pi i l x}\, dx = \frac{1}{c^m} \int_{Rm} \varphi(-A\, x)\, e^{-\frac{2\pi i}{c} l x}\, dx$$

also

$$a_l = \frac{1}{c^m} \int_{B_t} \varphi(x)\, e^{\frac{2\pi i k x}{c}}\, dx \quad (k = A^{*-1}) \tag{3}$$

Nach dem Vollständigkeitssatz ist $\sum |a_l|^2$ konvergent und es ist

$$\int_E \Phi^2\, dx = \sum_l |a_l|^2 \tag{4}$$

In (4) spezialisieren wir jetzt, indem wir $\varphi(x) = 1$ setzen und $c = 2$ nehmen. Dann ist $a_0 = \frac{1}{2^m} \int\limits_{B_t} dx = \frac{V}{2^m}$, wo $V = \mathfrak{J}t^m$ das Volumen von B_t. Weiter ist

$$\int\limits_E \Phi^2 dx = \int\limits_{R_m} \varphi(-2Ax) \sum_g \varphi(2A(g-x)) dx = \frac{1}{2^m} \sum_g \int\limits_{B_t} \varphi(-x+2Ag)\, dx,$$

also wird aus (4)

$$2^m \left[V + \sum_g{}' \int\limits_{B_t} \varphi(-x+2Ag)\, dx\right] = V^2 + \sum_l{}' \left| \int\limits_{B_t} e^{\pi i k x}\, dx \right|^2 \qquad (5)$$

Dabei bedeutet Σ', daß bei der Summation $g = 0$, bzw. $l = 0$ auszulassen ist. Diese Formel stammt von *C. Siegel*[7].

§ 7.

Wir nehmen für $\varphi(x)$ wieder $\varphi(x) = 1$ auf B_t, 0 sonst, setzen aber $c = 1$. Dann stellt

$$\Phi(y) = \sum_g \varphi(A(g-y)) \sim \sum_l a_l e^{2\pi i l y} \qquad (1)$$

die Anzahl der Gitterpunkte in $f(A(x-y)) \leqq t$ dar.

Es genügt, wenn y auf den Würfel

$$E : 0 \leqq y_i \leqq 1 \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (2)$$

beschränkt wird.

Wir betrachten gleich allgemeiner, wenn wir $t^2 = u$ setzen, die Funktion $\varphi_\delta(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} (u - f^2(x))^\delta$ auf B_t. Damit ist, wenn $f(Ax) = F(x)$ gesetzt wird, nach § 6 (2) und (3)

$$\Phi_\delta(y, u) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \sum_{F^2(g-y) \leqq u} (u - F^2(g-y))^\delta \sim \sum_l L_\delta(l, u)\, e^{2\pi i l y} \qquad (3)$$

wo

$$L_\delta(l, u) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int\limits_{f^2(x) \leqq u} (u - f^2(x))^\delta\, e^{2\pi i k x}\, dx. \qquad (4)$$

Es ist

$$L_{\delta+1}(l, u) = \int\limits_0^u L_\delta(l, v)\, dv, \qquad (5)$$

[7]) Acta Mathematica 64.

denn es ist

$$\int_0^u L_\delta(l, v)\, dv = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int_0^u dv \int_{f \leqq \sqrt{v}} (v - f^2)^\delta\, e^{2\pi i k x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int_{f \leqq \sqrt{u}} e^{2\pi i k x}\, dx \int_{f^2}^u (v - f^2)^\delta\, dv =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta+2)} \int_{f \leqq \sqrt{u}} e^{2\pi i k x}\, (u - f^2)^{\delta+1}\, du = L_{\delta+1}.$$

Weiter ist

$$L_\delta(0, u) = \Im\, u^{\frac{m}{2}+\delta} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)} \tag{6}$$

denn nach § 1 (1) ist

$$\int_{f \leqq \sqrt{u}} (u - f^2(x))^\delta\, dx = m I \int_0^{\sqrt{u}} (u - v^2)^\delta\, v^{m-1}\, dv =$$

$$= \frac{m}{2} \Im\, u^{\frac{m}{2}+\delta} \frac{\Gamma(\delta+1)\,\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}$$

Wie (5) zeigt man

$$\Phi_\delta(l, u) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^u \Phi(v, y)\, (u - v)^{\delta-1}\, dv \tag{7}$$

wo $\Phi_0 = \Phi$ aus (1) ist

Daraus folgt

$$\Phi_{\delta+1}(y, u) = \int_0^u \Phi_\delta(y, v)\, dv \tag{7'}$$

Es wird jetzt gezeigt werden, daß in (3) für $\delta > \frac{m-1}{2}$ das $=$ Zeichen steht. Wir zeigen gleich folgenden allgemeineren Satz:

Satz 7: Ist h ein beliebiger Punkt, aber kein Gitterpunkt $\neq 0$, so gilt

$$\sum_{F^2(g-y) \leqq u} (u - F^2(g-y))^\delta\, e^{-2\pi i h g} =$$

$$= \sum_l e^{2\pi i (l-h) y} \int_{f^2 \leqq u} e^{-2\pi i (k-\bar{h}) x}\, (u - f^2)^\delta\, dx, \tag{8}$$

wo $\bar{h} = A^{*-1} h$, wenn

1. $\delta > \frac{m-1}{2}$, und zwar für alle y in E. Die Reihe rechts in (8) konvergiert absolut und gleichmäßig in jeden Intervall $[u_1, u_2]$ wo $u_1 > 0$ und wenn

2. $\delta \geqq 0$, $h = 0$ für alle in E bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maße 0.

Dabei ist vorausgesetzt, daß $B_1 = B$ alle Voraussetzungen von § 3 erfüllt.

Beweis: Es werde gesetzt

$$\Phi_\delta^*(y,u) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \sum_{F^2(g-y)\leqq u} (u - F^2(g-y))^\delta \, e^{-2\pi i h g}, \quad L_\delta^*(l,u) = \int_{f^2 \leqq u} e^{2\pi i (k-\bar{h})x} (u - f^2)^\delta \, dx.$$

Dann gilt auch für diese Größen (5) und (7′).

Es soll zunächst der erste Teil der Behauptung bewiesen werden. Es sei also $\delta > \frac{m-1}{2}$. Dann ist die Reihe rechts in (8) absolut und in jedem Intervall $[u_1, u_2]$ in u gleichmäßig konvergent, denn es ist nach § 5 (3)

$$L_\delta^*(l,u) = u^{\frac{m-1}{4} + \frac{\delta}{2}} \, 0\left(\frac{1}{|k-\bar{h}|^{\frac{m+1}{2}+\delta}}\right) + u^{\delta-1} \, 0\left(\frac{1}{|k-\bar{h}|^{m+2}}\right). \tag{9}$$

Da $k - \bar{h} = A^{*-1}(l-h) \neq 0$, da h kein Gitterpunkt und $\sum_l \frac{1}{|k-\bar{h}|^\sigma}$ für $\sigma > m$ konvergent ist, so ist damit diese Behauptung gezeigt.

Wir betrachten die Funktion $\varphi_\lambda(x) = (u - F^2(x-y))^\delta \, e^{-2\pi i h x}$ auf $F^2(x-y) \leqq u$. Außerhalb dieses Bereiches sei $\varphi_\lambda = 0$. Man sieht weiter, daß alle Voraussetzungen des Satzes von *Bochner*[8] über die *Poisson*sche Summenformel erfüllt sind und wir erhalten nach diesem Satz (8).

Für $u = 0$ gilt sie selbstverständlich auch.

Es soll nun der zweite Teil der Behauptung gezeigt werden. Nach (3) ist die rechte Seite von (8) für $h = 0$ die Fouriersche Reihe der linken

[8] Mathematische Annalen 106.

Seite. Nun ist aber nicht nur $\sum_l |L_\delta|^2$ konvergent, wie es nach dem Vollständigkeitssatz sein muß (vgl. § 6 (4)), sondern sogar $\sum_l |L_\delta|^2 |l|^\eta$ für jedes η mit $0 < \eta < 1$. Denn es ist zunächst nach Hilfssatz 2 $|l| \leqq C(A)|k|$, wo C von A abhängt. Weiters ist nach (9) $\sum_l |L_\delta|^2 |k|^\eta$ konvergent. Daraus folgt aber nach einem Satz von *Kaczmarz*[9], daß die Reihe rechts in (8) für fast alle y in E konvergiert und gleich der linken Seite ist. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 8: Ist $f(x)$ die Distanzfunktion, $H(u)$ die Stützfunktion eines konvexen Körpers B, welcher den Voraussetzungen des § 3 genügt, und sind außerdem noch diese Funktionen für $x \neq 0$, $u \neq 0$ sogar analytisch, so gibt es eine periodische Funktion $X(x)$ (Periode 1 in $x_1, \ldots x_m$), so beschaffen, daß für seine Fourierkoeffizienten a_l gilt:

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} \left| \sum_{f(g) \leqq R} \left(1 - \frac{f^2(g)}{R^2}\right)^{\frac{m-1}{2}} a_g \right| = +\infty \tag{10}$$

Für die Kugel wurde dies von *Bochner*[10] gezeigt. Für den Beweis ist folgendes zu beachten: $H(u)$ ist sicher nicht analytisch in $u = 0$ und dies ist auch die einzige Stelle nach Voraussetzung. Weiters haben wir in § 5 (3) eine asymptotische Formel für $L_\delta{}^*$, welche in δ im Intervall $[\frac{m-1}{2}, \delta_0]$ ($\delta_0 > \frac{m-1}{2}$, beliebig) gilt. Dann kann der Beweis wie bei *Bochner* geführt werden.

§ 8.

Es soll jetzt für die Anzahl der Gitterpunkte $\Phi(y, u)$ von $f(A(x-y)) \leqq \sqrt{u}$ eine asymptotische Abschätzung gegeben werden:

Satz 9:

$$\Phi(y, u) = \Im u^{\frac{m}{2}} + 0\left(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}\right) \tag{1}$$

Für das Ellipsoid wurde dies von *Landau*[11] gezeigt. Wir werden weitgehend seiner Methode folgen. Satz 7, § 7 gilt sicher für $\delta = [\frac{m+1}{2}] > \frac{m-1}{2}$ und $h = 0$. Es ist nach (5)

$$\frac{d^\delta L^\delta}{d u^\delta} = L_0 = \int_{f^2(x) \leqq u} e^{2\pi i k x}\, d x \text{ und nach § 5 (3)}$$

[9] Studia Mathematica 2.
[10] Transactions 40, S. 193.

$$L_\delta = u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}}\ 0\left(\frac{1}{|k|^{\frac{m+1}{2}+\delta}}\right), \tag{2}$$

da das zweite 0-Glied wegen $\frac{m+1}{2}+\delta \leqq m+1$ wegfällt. Wir setzen kurz $L_\delta = L$ und betrachten mit *Landau*

$$\Delta L = \sum_{\gamma=0}^{\delta} (-1)\, l^{\delta-\gamma} \binom{\delta}{\gamma} L(u+\nu\tau, y)$$

wo $\tau = u^{\frac{1}{m+1}}$, also $0 < \tau \leqq u$ ist. Dann ist zunächst nach (2)

$$\Delta L = u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}}\ 0\left(\frac{1}{|k|^{\frac{m+1}{2}+\delta}}\right)$$

Nun gibt es sicher ein τ' mit $u \leqq \tau' \leqq u+\delta\tau$, so daß $\Delta L = \tau^\delta L^{(\delta)}(\tau')$ Nun ist $L^{(\delta)} = L_0$, also folgt aus (2) mit $\delta = 0$

$$\Delta L = \tau^\delta u^{\frac{m-1}{4}}\ 0\left(\frac{1}{|k|^{\frac{m+1}{2}}}\right).$$

Zusammenfassend haben wir

$$\Delta L = \frac{u^{\frac{m-1}{4}}}{|k|^{\frac{m+1}{2}}}\ \mathrm{Min}\left(\left(\frac{\sqrt{u}}{|k|}\right)^\delta,\ \tau^\delta\right). \tag{3}$$

Nach § 7 (8) und § 7 (6) gilt

$$\Phi_\delta(y,u) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}\ u^{\frac{m}{2}+\delta} + \sum_l{}' e^{2\pi i l y} L_\delta(l,u).$$

Wenden wir auf Φ_δ die obige Δ-Operation an, welche wir rechts gliedweise anwenden können, so kommt

$$\Delta\Phi_\delta = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}\ \Delta\,(u^{\frac{m}{2}+\delta}) + \sum_l{}' e^{2\pi i l y}\Delta L_\delta(l,u) \tag{4}$$

Dann ist nach (3)

$$|\sum_l{}' e^{2\pi i l y}\Delta L| \leqq C\, u^{\frac{m-1}{4}} \sum_l{}' \frac{1}{|k|^{\frac{m+1}{2}}}\ (\mathrm{Min}\ (\frac{\sqrt{u}}{|k|},\ \tau))^\delta =$$

$$= C\Big[u^{\frac{m-1}{4}}\tau^\delta \sum_{|k|\leqq\frac{\sqrt{u}}{\tau}} |k|^{-\frac{m+1}{2}} + u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}} \sum_{|k|>\frac{\sqrt{u}}{\tau}} |k|^{-\frac{m+1}{2}-\delta}$$

Nun ist die erste Summe rechts $0\left(\left(\frac{\sqrt{u}}{\tau}\right)^{\frac{m-1}{2}}\right)$, die zweite

$$0\left(\left(\frac{\sqrt{u}}{\tau}\right)^{\frac{m-1}{2}-\delta}\right)$$

also folgt

$$\sum_{l}{}' e^{2\pi i l y}\, \Delta L = 0\,(\tau^{\delta}\, u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}) \tag{5}$$

Weiter ist

$$\Delta\,(u^{\frac{m}{2}+\delta}) = \tau^{\delta}\,\frac{d^{\delta}}{d\,u^{\delta}}\,(u^{\frac{m}{2}+\delta})\,|_{u=\tau'} = \tau^{\delta}\,\frac{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}\,\tau'^{\frac{m}{2}} =$$

$$= \tau^{\delta}\,\frac{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}\,(u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m}{2}-1}\tau)),$$

wo τ' eine Zwischenstelle in $[u, u+\delta\,\tau]$. Es ist also

$$\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}\,\Delta\,(u^{\frac{m}{2}+\delta}) = \tau^{\delta}\,(u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})) \tag{6}$$

Daraus folgt, wenn wir (5) und (6) zusammenfassen

$$\Delta\,\Phi_{\delta} = \tau^{\delta}\,(\Im\, u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})) \tag{7}$$

Nun ist, wenn wir das Argument y unterdrücken,

$$\Delta\,\Phi_{\delta} = \int_{u}^{u+\tau} d\,u_1 \int_{u_1}^{u_1+\tau} du_2 \ldots \int_{u_{\delta-1}}^{u_{\delta-1}+\tau} \Phi\,(u_{\delta})\,d\,u_{\delta} \tag{8}$$

Nun ist

$$\Phi\,(u) \leqq \Phi\,(u_{\delta}) \leqq \Phi\,(u+\delta\,\tau), \text{ also nach (8)}$$

$$\tau^{\delta}\,\Phi\,(u) \leqq \Delta\,\Phi \leqq \tau^{\delta}\,\Phi\,(u+\delta\,\tau). \tag{9}$$

Dann ist nach (7) einerseits $\Phi\,(u) \leqq \Im\, u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})$, andererseits $\Phi\,(u+\delta\,u^{\frac{1}{m+1}}) \geqq \Im\, u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})$.

Setzen wir $u+\delta\,u^{\frac{1}{m+1}} = v$, dann ist $u = v - \delta\,u^{\frac{1}{m+1}} = v + 0\,(v^{\frac{1}{m+1}})$

also $\Phi\,(v) \geqq \Im\,(v+0\,(v^{\frac{1}{m+1}}))^{\frac{m}{2}} + 0\,(v^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}) = \Im\, v^{\frac{m}{2}} + 0\,(v^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}})$

also

$$\Phi(u, y) = \Im u^{\frac{m}{2}} + 0\left(u^{\frac{m(m-1)}{2(m+1)}}\right) \text{ w.z.b.w.}$$

Wir wollen jetzt, und zwar für $y = 0$ weiter zeigen (vgl. *Landau*[11]) *Satz 10*: Es ist

$$\Phi(0, u) = \sum_{F^2(g) \leqq u} 1 = \Im u^{\frac{m}{2}} + \Omega\left(u^{\frac{m-1}{4}}\right) \tag{10}$$

Beweis: Wir setzen $R_\delta(0, u) = \Phi_\delta(0, u) - \Im u^{\frac{m}{2}+\delta} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)}$,

dann gilt wegen § 7 (7)

$$R_\delta = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^u R_0(v, 0)(u - v)^{\delta-1} \, dv. \tag{11}$$

Weiter ist nach § 7 (8) und § 7 (6), da R_δ reell ist,

$$R_\delta = \sum_l{}' \operatorname{Real} L_\delta(l u), \tag{12}$$

wenn $\delta > \frac{m-1}{2}$. Wir verwenden (12) zunächst für $\delta_1 = \delta + 1$, wo $\delta = [\frac{m+1}{2}]$. Dann ist nach (2), da $\delta_1 \leqq m + 2$, auf (12) angewendet

$$R_{\delta_1} = 0\left(u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta_1}{2}}\right). \tag{13}$$

Weiter ist nach § 5 (3)

$$\operatorname{Real} L_\delta = \frac{u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}}}{|k|^{\frac{m+1}{2}+\delta}}[A_l \cos\alpha_l + B_l \cos\beta_l] + 0\left(\frac{u^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta-1}{2}}}{|k|^{\frac{m}{2}+1+\delta}}\right) \tag{14}$$

wo $A_l = \frac{\Gamma(\delta+1)}{2\pi^{\delta+1}} \frac{\sqrt{K(e_k)}}{(H(e_k))^\delta}$, $B_l = \frac{\Gamma(\delta+1)}{2\pi^{\delta+1}} \frac{\sqrt{K(-e_k)}}{(H(-e_k))^\delta}$. Sie sind also positiv. Weiter ist

$$\alpha_l = 2\pi\sqrt{u}\, H(k) - \frac{\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2}), \beta_l = 2\pi\sqrt{u}\, H(-k) - \frac{\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2})$$

Weiter ist, da $\delta = [\frac{m+1}{2}]$, $\cos\alpha_l = (-1)^j \cos(2\pi\sqrt{u}\, H(k) - \frac{\pi}{4}\varepsilon)$,

wo $j = [\frac{m+1}{2}]$ und $\varepsilon = 1$ wenn m gerade und sonst 0. Dasselbe gilt

[11] Preußische Sitzungsberichte 1915, Göttinger Nachrichten, S. 137ff.

für $\cos \beta_l$. Setzen wir noch $2\pi \sqrt{u}\, H(k) - \frac{\pi}{4} \varepsilon = \alpha_l'$, $2\pi \sqrt{u}\, H(-k) - \frac{\pi}{4} \varepsilon = \beta'_l$ so wird (12)

$$R_\delta = (-1)^j\, u^{\frac{m-1}{4} + \frac{\delta}{2}} \Sigma' \frac{A_l \cos \alpha_l' + B_l \cos \beta_l'}{|k|^{\frac{m+1}{2} + \delta}} + 0\ (u^{\frac{m-1}{4} + \frac{\delta - 1}{2}}) \tag{15}$$

Es sei nun K eine natürliche Zahl. Dann kann man zu jedem $\eta > 0$ und zu jedem u_0 ein $u(\eta, K, u_0)$ so bestimmen, so daß

$$\cos \alpha_l' = \cos (2\pi \sqrt{u}\, H(\pm k) - \frac{\pi}{4} \varepsilon) > \cos \frac{\pi}{4} \varepsilon - \eta \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} - \eta$$

für alle k mit $|k| \leqq K$ (Dirichletscher Approximationssatz. Dann ist aber, wenn Σ' die Summe in (15) rechts bedeutet

$$\Sigma' \geqq \sum_{|k| \leqq K}' - \sum_{|k| > K} \frac{A_l + B_l}{|k|^{\frac{m+1}{2} + \delta}}, \text{ also}$$

$$\overline{\lim_{u \to \infty}}\ \Sigma' \geqq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \eta\right) \sum_{|k| \leqq K}' \frac{A_l + B_l}{|k|^{\frac{m+1}{2} + \delta}} - \sum_{|k| > K} \frac{A_l + B_l}{|k|^{\frac{m+1}{2} + \delta}},$$

also für $\eta \to 0$, $K \to \infty$

$$\overline{\lim_{u \to \infty}}\ \Sigma' \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k' \frac{A_l + B_l}{|k|^{\frac{m+1}{2} + \delta}} > 0 \tag{16}$$

Daraus folgt, daß

$$R_\delta = \Omega\ (u^{\frac{m-1}{4} + \frac{\delta}{2}}) \tag{17}$$

Wäre nun (10) falsch, also

$$R_0 = o\ (u^{\frac{m-1}{4}}) \tag{18}$$

so wäre z. B. nach *M. Riesz*[12], wegen (13) und $0 < \delta < \delta_1$

$$R_\delta = o\ (u^{\frac{m-1}{4}\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right)}\ u^{\left(\frac{m-1}{4} + \frac{\delta_1}{2}\right)\frac{\delta}{\delta_1}}) = o\ (u^{\frac{m-1}{4} + \frac{\delta}{2}}) \tag{19}$$

in Gegensatz zu (17). Damit ist alles gezeigt.

---

[12] Acta Szeged 1.

§ 9.

Es soll nun Satz 9 in gewisser Hinsicht für fast alle η aus E (§ 7 (2)) verschärft werden.

Satz 11: Es sei $\lambda(u)$ eine monoton wachsende Funktion mit $\lambda(u) \to \infty$, δ eine beliebige Zahl mit $0 \leqq \delta < \frac{2}{m-1}$ und $\{u_\nu\}$ eine solche Folge, so daß

$$\Sigma \frac{1}{\lambda_\nu^{2+\delta}},$$

wo $\lambda_\nu = \lambda(u_\nu)$, konvergiert. Dann ist für fast alle y aus E

$$\Phi(y, u) = \Im u^{\frac{m}{2}} + 0\,(u^{\frac{m-1}{4}} \lambda(u)), \tag{1}$$

wo u die Folge $\{u_\nu\}$ durchläuft.

Für $\delta = 0$ wurde dieser Satz von *Kendall*[3] gezeigt, und zwar für $m = 2$.

Beweis: Nach § 7 (1) ist $\sum_l L_0\, e^{2\pi i l y}$ die *Fourier*sche Reihe von $\Phi(y, u)$, also

$$R_0 = \Phi - \Im u^{\frac{m}{2}} \sim \sum_l{}' L_0(l, u)\, e^{2\pi i l y} \tag{2}$$

Es ist nach § 6 (4) $\sum_l{}' |L_0|^2$ konvergent. Da aber nach § 8 (2) $L_0 = 0\left(\frac{u^{\frac{m-1}{4}}}{|k|^{\frac{m+1}{2}}}\right)$, so ist sogar $\Sigma' |L_0|^\alpha$ mit $\alpha = 1 + \frac{1}{\delta+1}$ konvergent, da $\Sigma |k|^{-\frac{m+1}{2}\alpha}$ wegen $\frac{m+1}{2}\alpha > m$ konvergent. Dann folgt nach dem Satz von *Hausdorff-Yonny*[13], daß wegen $1 < \alpha < 2$

$$\sigma_\beta = \left[\int_E |R_0(y, u)|^\beta d y\right]^{\frac{1}{\beta}} \leqq [\Sigma' |L_0|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{3}$$

wo $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, also $\beta = 2 + \delta$. Wir erhalten also

$$\sigma_\beta^\beta = 0\,(u^{\frac{m-1}{4}\beta}). \tag{4}$$

---

[13] F. Riesz, Math. Zeitschrift 18.

Nun gehen wir wie *Kendall* vor. Ist, u fest, M die Teilmenge von E, wo $|R_0| \geqq \lambda \sigma_\beta$, dann ist

$$\sigma_\beta^\beta \geqq \int_M |R_0|^\beta \, dy \geqq \lambda^\beta \sigma_\beta^\beta V(M),$$

wo $V(M)$ das Maß von M. Es ist also

$$V(M) \leqq \lambda^{-\beta}. \tag{5}$$

Um (1), also $R_0(y,u) \leqq C(y) u^{\frac{m-1}{4}} \lambda(u)$ für $u = u_\nu \to \infty$ und fast alle y zu zeigen, gehen wir so vor: Es ist nur zu zeigen, daß die Menge $\overline{M}$, für die $|R_0(y,u_\nu)| < \lambda_\nu \sigma_\beta^{(\nu)}$ ($\sigma_\beta^{(\nu)} = \sigma_\beta(u_\nu)$) für alle ν, mit $\sigma_\beta^{(\nu)} = 0(u_\nu^{\frac{m-1}{4}})$ das Maß 1 hat. Mit M^* soll stets das Komplement von M in E bezeichnet werden.

Dann ist $\overline{M} = \Sigma S_\nu$, wo $S_\nu = \sum_{j=\nu}^{\infty} M_j^*$. Dabei ist

$$M_j = \text{Menge}\{|R_0(y,u)| \geqq \lambda_\nu \sigma_\beta^{(\nu)}\}^*$$

Es ist also $V(S_\nu^*) \leqq \sum_{j=\nu}^{\infty} V(M_j) \leqq \sum_{j=\nu}^{\infty} \lambda_j^{-\beta} < \eta$, wenn $\nu \geqq \nu_0(\eta)$ für jedes $\eta > 0$, also $V(\overline{M}) > 1 - \eta$ für alle η w.z.b.w.

§ 10.

Für $\beta = 2$ gilt nach § 6 (4) in § 9 (3) das Gleichheitszeichen, also wenn $\sigma = \sigma_2$ gesetzt wird

$$\sigma^2 = \Sigma' |L_0|^2 \tag{1}$$

Wir nennen mit *Kendall* σ die Streuung. Es ist

$$\frac{\sigma^2}{u^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{1}{4\pi^2} \Sigma' \frac{1}{|k|^{m+1}} (K(e_k) + K(-e_k) +$$

$$+ 2\sqrt{K(e_k) K(-e_k)} \cos(|k|\sqrt{u}\,(H(e_k) + H(-e_k) - \frac{\pi}{2}(m+1)) +$$

$$+ 0(u^{-\frac{1}{4}}) \tag{2}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{U} \int_1^U \frac{\sigma^2}{u^{\frac{m-1}{4}}} \, du = \frac{1}{4\pi^2} \Sigma' \frac{K(e_k) + K(-e_k)}{|k|^{m+1}} + 0(U^{-\frac{1}{4}}) \tag{3}$$

also

$$\lim_{U \to \infty} \frac{1}{U} \int_1^U \frac{\sigma^2}{u^{\frac{m-1}{2}}} \, du = \frac{1}{4\pi^2} \sum{}' \frac{K(e_k) + K(-e_k)}{|k|^{m+1}} \tag{4}$$

Aus (3) folgt sofort

Satz 12: Es ist die Streuung $\sigma = \Omega(u^{\frac{m-1}{4}})$.

Wäre nämlich $\sigma = o(u^{\frac{m-1}{4}})$, so wäre die linke Seite von (3), $o(1)$ in Gegensatz zur rechten Seite.

Aus (3) läßt sich noch eine weitere Folgerung ziehen (vgl. dazu für $m = 2$ *Kendall*, S. 22 (31)): Es war ja σ, wie B_0 usw., von der Matrix A mit Det. $A = 1$ abhängig. Es sei nun A orthogonal. Dann bilden wir uns den Mittelwert $\bar{\sigma}^2$ aller σ^2, also

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{\{A\}} \int \sigma^2 \, d\{A\}. \tag{5}$$

Dabei bedeutet d $\{A\}$ das Volumselement in der Gruppe der Drehungen und $\{A\}$ das Gesamtvolumen.

Nun ist $\int K \, d\sigma = S(B)$ (vgl. B. F. *S.* 63, Z. 6 v. u.), wo $d\sigma$ wie in § 3 das Oberflächenelement der m-dim. Einheitskugel E^m bedeutet. Es sei ω die Gesamtoberfläche. Dann folgt aus (3)[13a]

$$\lim_{U \to \infty} \int_1^U \frac{\bar{\sigma}^2}{u^{\frac{m-1}{2}}} \, du = \frac{S(B)}{2\pi^2 \omega} \sum_l{}' \frac{1}{|L|^{m+1}} \tag{6}$$

Dabei ist, wie immer $B: f(x) \leqq 1$ und $\omega = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$.

§ 11.

Wir wollen nun unsere asymptotischen Formeln auf die Geometrie der Zahlen anwenden.

Es soll jetzt vorausgesetzt werden, daß B symmetrisch in bezug auf 0 ist. Weiter soll $m \not\equiv 1$ (4) sein, wo m die Dimension unseres Raumes ist. Die Anzahl der Gitterpunkte $\neq 0$ in $f(Ax) \leqq t$, welche gerade ist, sei $2S$. Es ist $V = \Im t^n$ das Volumen von $B_t: f \leqq t$ und es werde $B_1 = B$ gesetzt. Dann gilt

Satz 13: Es gibt ein t_0, welches nur von B abhängt, so daß für alle $t > t_0$ und für alle Matrizen A mit Det. $A = 1$

$$V \leqq 2^{m-1}(S+1) + \sqrt{4^{m-1}(S+1)^2 - \varrho_t C}. \tag{1}$$

[13a] B besitze Mittelpunkt.

Dabei ist $\varrho_t = \inf_{B_t} K$ und $C > 0$ eine absolute Konstante, die nur von m abhängt.

Dieser Satz stellt für große t eine Verschärfung von

$$V \leqq 2^m (S + 1) \tag{2}$$

dar. (Verallgemeinerter Minkowkischer Satz.)

Beweis: Nach Satz 5, § 5 (3) und (3′) ist für $\delta = 0$

$$I = t^{\frac{1-m}{2}} \int_{B_t} e^{i\pi k x}\, d\,x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{|k|}\right)^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{K(e_k)}\left(\cos\left(\pi k t H(e_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(m+1)\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{t\,|k|}}\right)\right. \tag{3}$$

wo $k = A^{\nu-1} l = \widehat{A}\, l$. Es ist Det. $\widehat{A} = 1$. Nun wählen wir ein $l_0 \neq 0$ so, daß

$$1 \leqq |k_0| \leqq \sqrt{m} \tag{4}$$

Dies geht nach dem *Minkowski*schen Linearformensatz. Dann ist für $k = k_0 s$ (s natürliche Zahl $\varrho = \inf_B K$)

$$|I| \geqq \frac{1}{\pi}\, \varrho^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{m}\, s}\right)^{\frac{m+1}{2}} \left| \left|\cos\left(\pi\, t\, s\, H\,(k_0) - \frac{(m+1)\pi}{4}\right)\right| - \right.$$

$$\left. - \frac{|C_1(B)|}{\sqrt{t\, s\, k_0}}\right|$$

Wir wählen nun t_0 so groß, daß $\frac{|C_1(B)|}{\sqrt{t_0}} < 2$ wird. Weiter wählen wir s, bei gegebenen $t > t_0$, so daß $\left|\frac{1}{2} s\, t\, H\,(k_0) - g\right| < \frac{1}{12}$ und $(32)^2 \leqq s \leqq 1\,2\,(32)^2$ (g ganz). Dies ist nach den *Dirichlet*schen Approximationssatz stets möglich. Dann ist, wenn $\alpha = \pi\,(s\, t\, H\,(k_0) - 2g)$

$$|\cos\alpha| \geqq \cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6} \geqq |\sin\alpha| \quad \text{und} \quad \left|\cos\left(\alpha - \frac{(m+1)\,\pi}{4}\right)\right| \geqq$$

$$\geqq |\cos\alpha|\, \left|\cos\frac{(m+1)\pi}{4}\right| - |\sin\alpha|\, \sin\frac{(m+1)\pi}{4} \geqq \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(\sqrt{3} - 1) > \frac{1}{8},$$

da $\left|\cos\pi\,\frac{m+1}{4}\right| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\left|\sin\pi\,\frac{m+1}{4}\right| \leqq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ für $m \not\equiv |(4)$.

Weiter ist $\frac{C_1(B)}{\sqrt{t\,s\,|k_0|}} \leqq \frac{2}{\sqrt{s}} = \frac{2}{32}$. Wir haben also, wenn $t > t_0$, uns ein k so konstruiert, daß

$$t^{\frac{1-m}{2}} \left| \int_{B_t} e^{\pi i k x}\, d\,x \right| \geqq \sqrt{C}\, \varrho^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

wo $C = \frac{1}{(16\,\pi)^2} (4800\sqrt{m})^{-m-1}$. Daraus folgt nach § 6 (5)

$$2^m \left[V + \sum_g{}' \int_{B_t} \varphi(x - 2\,A\,g)\, d\,x\right] \geqq V^2 + C\,\varrho\, t^{m-1} \tag{6}$$

Nun ist $\int_{B_t} \varphi(x - 2\,A\,g)\, d\,x$ genau dann $\neq 0$, wenn $\pm A\,g$ in B_t, da B_t konvex und symmetrisch in 0 ist. Weiters sind natürlich diese Integrale $\leqq V$, also folgt aus (6), da $f(A\,x) \leqq t$, S Gitterpunktpaare $\neq 0$ enthält,

$$2^m\, V\,(S+1) \geqq V^2 + C\,\varrho_t \tag{7}$$

da $\varrho_t = \varrho\, t^{m-1}$. Daraus folgt zunächst (2) und weiter $C\,\varrho_t \leqq 2^m\, V\,(S+1)$. Ist nun $V \leqq 2^{m-1}\,(S+1)$, so ist (1) richtig. Ist aber $V > 2^{m-1}\,(S+1)$, so folgt aus (7)

$$[V - 2^{m-1}\,(S+1)]^2 \leqq 4^{m-1}\,(S+1)^2 - C\,\varrho_t,$$

also wieder (1) w.z.b.w.

§ 12.

Die Verschärfung von § 11 (2) wurde unter stark einschränkenden Voraussetzungen über B_t erhalten ($m \equiv 1$ (4), Differenzierbarkeit von $S(B)$ usw.). Es soll nun eine andere Verschärfung angegeben werden, die nicht diese Voraussetzungen macht. (Für Parallelepipede wurde diese Verschärfung schon von *Gelfond*[5] angegeben.)

Satz 14: Ist N die Anzahl der Gitterpunktpaare $\neq 0$ in

$$H(A^{-1}\,l) \leqq \frac{\lambda}{2\,t}, \tag{1}$$

wo $0 < \lambda < 1$ beliebig, H Stützfunktion von B: $f(x) \leqq 1$, so ist

$$V \leqq \frac{2^m\,(S+1)}{1 + N\cos^2\frac{\pi}{2}\lambda} \tag{2}$$

Dabei ist natürlich wieder B symmetrisch und V, S haben dieselbe Bedeutung wie in § 11.

Beweis: Es ist, da $H \leqq 1$ der polare Körper zu B: $f \leqq 1$ (*B.F.* S. 28, *Mahler*[14]), $|x\,y| \leqq f(x)\,H(y)$, also $|k\,x| \leqq t\,H(A^{-1}\,l) \leqq \frac{\lambda}{2}$, wo $k = A^{*-1}\,l$, nach Voraussetzung (1). Für diese l ist dann

$$\left| \int e^{\pi i k x}\, d\,x \right| \geqq V \cos \frac{\pi}{2}\lambda$$

Also folgt aus § 6 (5) analog zu § 11 (7)

$$2^m\,(S+1)\,V \geqq V^2\,(1 + N \cos^2 \frac{\pi}{2}\,\lambda) \quad \text{w.z.b.w.}$$

Daraus folgt

Satz 15: Besitzt für

$$\tau < \frac{\lambda}{8}\left(\frac{\Im}{S+1}\right)^{\frac{1}{m}} \quad (0 < \lambda < 1) \tag{3}$$

$$H(A^{-1}\,l) \leqq \tau \tag{4}$$

eine Lösung und ist

$$\Im\, t^m + \frac{\lambda}{2\,\tau}\; t^{m-1} \cos^2 \frac{\pi}{2}\,\lambda > 2^m\,(S+1) \tag{5}$$

so besitzt $f(A\,x) \leqq t$ mehr als S Gitterpunktpaare $\neq 0$.

Beweis: Ist $\Im\, t^m > 2^m\,(S+1)$, so ist dies nach § 11 (2), welches immer gilt, richtig. Ist $\Im\, t^m \leqq 2^m\,(S+1)$, dann ist

$$(t\,\tau)^m \leqq \frac{2^m\,(S+1)}{\Im}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^m \frac{I}{2^m\,(S+1)} = \left(\frac{\lambda}{4}\right)^m,$$

also $\frac{\lambda}{2\,t\,\tau} \geqq 2$. Dann hat $H(A^{-1}\,l) \leqq \frac{\lambda}{2\,t} = \tau\,\frac{\lambda}{2\,t\,\tau}$ mindestens $2\left[\frac{\lambda}{2\,t\,\tau}\right]$ Gitterpunkte $\neq 0$, also $N \geqq 2\left[\frac{\lambda}{2\,t\,\tau}\right] \geqq \frac{\lambda}{2\,t\,\tau}$, da $\frac{\lambda}{2\,t\,\tau} \geqq 2$. Dann würde nach (2), wenn $f(A\,x) \leqq t$ höchstens S Gitterpunktpaare $\neq 0$ enthielte,

$$\Im\, t^m \leqq \frac{2^m\,(S+1)}{1 + \frac{\lambda}{2\,t\,\tau}\cos^2 \frac{\pi}{2}\lambda}$$

[14] Casopis 68, S. 93ff.

in Gegensatz zur Voraussetzung (5).

Bermerkung: (3) ist sicher erfüllt, wenn $\mathfrak{J}_1 \tau^m < (\frac{\lambda}{2})^m \frac{1}{(S+1)(m!)^2}$, wo $\mathfrak{J}_1$ das Volumen von $H(y) \leqq 1$ ist, denn nach *Mahler*[14] ist $\mathfrak{J}_1 \geqq \geqq \frac{4^m}{(m!)^2}$.

Beschränkte Integrale auf speziellen transcendenten Riemannschen Flächen.

(2. Mitteilung)

Von
Hans Hornich, Graz.

(Eingelangt am 10. Juni 1949.)

In Weiterführung der ersten Arbeit mit gleichem Titel[1] sollen nunmehr die Perioden der beschränkten Normalintegrale näher untersucht werden.

Die Perioden $a_{n\,m} = \int\limits_{B_n} d\,v_{m-1,\,m}$ sind rein imaginär, also wenn wir $a_{n\,m} = i\,h_{n\,m}$ setzen, die $h_{n\,m}$ reell. Wir bestimmen die Vorzeichen der $h_{n\,m}$. Der Querschnitt A_n umlaufe das Intervall a_n im negativen Sinn auf dem ersten Blatt; wegen $\int\limits_{A_{n-1}} d\,v_{n-1,\,n} = 1$ ist auf dem Intervall a_{n-1} (hier und im folgenden die Intervalle als Rand der oberen Halbebene des ersten Blattes gedacht) $\frac{d\,v_{n-1,\,n}}{d\,z}$ reell > 0 und auf a_n reell < 0; für das dazwischenliegende Intervall b_n ist $\frac{d\,v_{n-1:\,n}}{d\,z}$ positiv imaginär und für alle b_m mit $m \neq n$ negativ imaginär. Also ist

$$h_{n\,n} > 0 \text{ und } h_{n\,m} < 0 \text{ für } n \neq m.$$

Nach der Bemerkung am Ende von I ist $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,v_{m-1,\,m} = 0$, also

$$h_{n\,n} = \sum_{m \neq n} h_{m\,n},$$

wo die rechtsstehende Summe konvergiert.

Die unendliche Matrix

$$\mathfrak{A} = (\Im\, a_{n\,m}) = (h_{n\,m}) \quad (n, m = 1, 2, \ldots)$$

---

[1] Monatsh. f. Math. 53, 187—201.

ist also reell, nach *II* wegen $a_{n\,m} = a_{m\,n}$ symmetrisch und die Reihen aus den Gliedern gleicher Zeile, bzw. Spalte konvergieren absolut; die Summe der Glieder der n-ten Zeile ist $= -h_{0\,n}$.

Die Abschnitte der Matrix $\mathfrak{A}$ *sind sämtlich positiv definit.*

Zunächst ist für beliebige $\sigma_1 \ldots \sigma_N$ die Summe $\sum\limits_{n,\,m=1}^{N} h_{n\,m}\,\sigma_n\,\bar{\sigma}_m \geqq 0$. Es genügt natürlich, dies für reelle σ_j zu zeigen. Nach dem obigen wird die Summe höchstens verkleinert, wenn wir statt $h_{n\,n}$ die endliche Summe $-\sum\limits_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{N} h_{n\,m}$ einsetzen. Diese neue Summe bleibt ersichtlich ungeändert, wenn alle σ_n durch $\sigma_n - a$ (a beliebig reell) ersetzt werden. Ersetzt man etwa alle σ_n durch $\sigma_n - \sigma_N$, so wird σ_N durch 0 ersetzt. Iteriert man den Vorgang, so ist schließlich, da für $N=2$ die Ungleichung evident ist, diese für alle N richtig.

Da wir dabei die $h_{n\,n}$ mindestens um $-h_{0\,n}$ verkleinert haben, ist sogar

$$\sum_{n,\,m=1}^{N} h_{n\,m}\,\sigma_n\,\bar{\sigma}_m + \sum_{n=1}^{N} h_{0\,n}\,\sigma_n\,\bar{\sigma}_n \geqq 0, \text{ also}$$

$$\sum_{n,\,m=1}^{N} h_{n\,m}\,\sigma_n\,\bar{\sigma}_m \geqq -\sum_{n=1}^{N} h_{0\,n}\,\sigma_n\,\bar{\sigma}_n > 0,$$

sobald nicht alle $\sigma_1 \ldots \sigma_N$ verschwinden, q. e. d.

Unmittelbar aus den Definitionen[2] folgt daraus:

Die Matrix $\mathfrak{A}$ *ist entweder positiv definit oder pseudodefinit.* Es ist $\mathfrak{A}$ nach dem obigen sicher positiv definit, wenn $\varliminf -h_{0\,n} > 0$ ist. Andererseits ist $\mathfrak{A}$ pseudodefinit, wenn $\varliminf h_{n\,n} = 0$.

Auf den Zusammenhang der zu $\mathfrak{A}$ gehörigen quadratischen Form mit den beschränkten Integralen kommen wir später zurück.

Für beliebige Zahlen $\sigma_1 \ldots \sigma_N$ ist

$$\left|\sum_{n,\,m=1}^{N} h_{n\,m}\,\sigma_n\,\bar{\sigma}_m\right| \leqq \sum_{n,\,m=1}^{N} |h_{n\,m}|\,\tfrac{1}{2}\left(|\sigma_n|^2 + |\sigma_m|^2\right) \leqq 2\sum_{n=1}^{N} h_{n\,n}\,|\sigma_n|^2$$

$$\leqq 2\sum_{n=1}^{N} |\sigma_n|^2 \cdot \operatorname*{Max}_{n=1,\ldots N} h_{n\,n}.$$

Sind die $h_{n\,n}$ beschränkt, so sind diese Summen für alle Zahlen N-Tupel $\sigma_1 \ldots \sigma_N$ mit $\sum\limits_{n=1}^{N} |\sigma_n|^2 = 1$ gleichfalls beschränkt, d. h. die

[2] Vgl. etwa *A. Wintner*, Spektraltheorie d. unendlichen Matrizen (1929).

Matrix $\mathfrak{A}$ ist eine beschränkte. Sind die $h_{n\,n}$ nicht beschränkt, so ist natürlich auch $\mathfrak{A}$ nicht beschränkt. Da nun weiter die Beschränktheit der $h_{n\,n}$ mit der gleichmäßigen Beschränktheit der Integrale $v_{n-1,\,n}$ auf $\overline{F}$ aequivalent ist, so gilt:

Die Matrix $\mathfrak{A}$ *ist dann und nur dann beschränkt, wenn die Integrale* $v_{n-1,\,n}$ (*etwa mit* $v_{n-1,\,n}(\alpha_0) = 0$) *auf* $\overline{F}$ *gleichmäßig beschränkt sind.*

Wir geben noch *Abschätzungen für die* $h_{n\,n}$. Sei $n > 0$ gegeben; nehmen wir auf der oberen Halbebene des ersten Blattes $v_{n-1,\,n}(\alpha_0) = 0$, so ist $u = \Re\, v_{n-1,\,n}$ auf der negativen reellen Achse Null und auf dem Intervall b_n gleich $\frac{1}{2}$. Die Schwankung des Imaginärteils $\Im\, v_{n-1,\,n}$ auf unserer Halbebene ist $\frac{h_{n\,n}}{2}$. Schlagen wir um einen Punkt z unserer Halbebene einen Kreis mit dem Radius $d(z)$, der durch den nächstgelegenen Punkt α_j geht, so ist die Schwankung von $\Im\, v_{n-1,\,n}$ auf diesem Kreis, da eventuell noch ein Stück der unteren Halbebene dazukommt, $\leqq h_{n\,n}$. Dann ist aber bekanntlich die Ableitung von u in z nach einer beliebigen Richtung ν

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \leqq \frac{h_{n\,n}}{d(z)}.$$

Nun gehen wir vom Mittelpunkt des Intervalls b_n, also $\frac{\alpha_{2n-1} + \alpha_{2n}}{2}$, aus entlang der Normale zur x-Achse bis zu einem Punkt $R\,\varepsilon^{i\gamma}$ $(0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, $R > 0$; es ist also $R\cos\gamma = \frac{\alpha_{2n-1} + \alpha_{2n}}{2})$ und von da entlang des Kreises $|z| = R$ bis zum Punkt $-R$. Auf diesem Wege C ist daher die Änderung von u

$$\int_C d\,u = -\,\tfrac{1}{2}.$$

Auf dem Kreisbogenstück C_1 mit $\frac{\pi}{2} \leqq \arg z \leqq \pi$ ist $d(z) > R$, also das Integral

$$\left|\int_{C_1} d\,u\right| \leqq h_{n\,n}\,\frac{\pi}{2}.$$

Für das Kreisbogenstück C_2 mit $\gamma \leqq \arg z = \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ ist $d(z) \geqq R\sin\varphi$, also

$$\left|\int_{C_2} d\,u\right| \leqq h_{n\,n} \int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\varphi}{\sin\varphi} = -h_{n\,n} \ln\, tg\, \frac{\gamma}{2}.$$

Auf der geraden Strecke C_3 ist $d\,(z) = \sqrt{y^2 + \left(\frac{\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}}{2}\right)^2}$, also das Integral

$$\left|\int_{C_3} d\,u\right| \leqq h_{n\,n} \int_0^{R\sin\gamma} \frac{d\,y}{d\,(z)} = h_{n\,n} \ln\,(tg\,\gamma \,.\, c_n + \sqrt{1 + tg^2\,\gamma \,.\, c_n^2}),$$

wenn wir $\frac{\alpha_{2n} + \alpha_{2n-1}}{\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}} = c_n$ setzen.

Es ist also schließlich für jedes $\gamma\ (0 < \gamma < \frac{\pi}{2})$

$$1/2 \leqq h_{n\,n} \left(\frac{\pi}{2} - \ln\, tg\, \frac{\gamma}{2} + \ln\,(c_n\, tg\,\gamma + \sqrt{1 + c^2_n\, tg^2\,\gamma})\right),$$

eine *Abschätzung von* $h_{n\,n}$ *nach unten, die nur von* α_{2n-1} *und* α_{2n}, also dem Intervall b_n *abhängt.* Sind insbesonders die c_n nach oben beschränkt, oder was auf dasselbe hinauskommt, ist $\alpha_{2n} \geqq K\,\alpha_{2n-1}$ $(K > 1)$, so sind alle $h_{n\,n} \geqq h > 0$.

Eine Abschätzung der $h_{n\,n}$ nach oben ergibt sich ganz analog: es ist $\Im v_{n-1,\,n} = v$ an den Intervallen a_j konstant und nimmt entlang des Intervalls b_n um $\frac{h_{n\,n}}{2}$ zu. Da die Schwankung von u auf unserer Halbebene $\leqq 1/2$ ist, gilt analog wie früher

$$\left|\frac{\partial\, v}{\partial\, \nu}\right| \leqq \frac{1}{d\,(z)}.$$

Wir nehmen die Mittelpunkte der Intervalle a_{n-1} und a_n, ziehen von diesen gerade Strecken normal auf die x-Achse bis $y = R\sin\gamma$ $(0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, R > 0)$ und verbinden die Endpunkte dieser Strecken durch den Bogen eines Kreises mit dem Mittelpunkt in der x-Achse und dem Radius R; es ist also $2\,R\cos\gamma = \frac{\alpha_{2n} + \alpha_{2n+1}}{2} - \frac{\alpha_{2n-2} + \alpha_{2n-1}}{2}$. Dann ist ganz analog wie oben

$$\frac{h_{n\,n}}{2} \leqq \int_{\gamma}^{\pi-\gamma} \frac{d\,\varphi}{\sin\varphi} + \int_0^{R\sin\gamma} \frac{d\,y}{\sqrt{y^2 + c_1^2}} + \int_0^{R\sin\gamma} \frac{d\,y}{\sqrt{y^2 + c_2^2}},$$

wo $c_1 = \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{2}$ und $c_2 = \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{2}$ ist. Ohne die Integrationen auszuführen, ist damit für jedes γ *eine Abschätzung von* $h_{n\,n}$ *nach oben gegeben, die nur von den Intervallen* a_{n-1} *und* a_n *abhängt.*

Ist $\mathfrak{A}$ beschränkt und definit, so gibt es eine und nur eine reziproke beschränkte Matrix $\mathfrak{B}$, so daß

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{E},$$

der Einheitsmatrix ist. Bezeichnen wir die Elemente von $\mathfrak{B}$ mit $b_{n\,m}$ und bilden die Reihen

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{n\,m}\, v_{m-1,\,m} = w_n \qquad (n \geqq 1)$$

so können wir über die Konvergenz dieser Reihen nichts aussagen, da zwar die Reihe der $v_{n-1,\,n}$ konvergiert (siehe II), aber nicht absolut quadratisch konvergent zu sein braucht. Sind aber diese Reihen, und zwar gleichmäßig in jedem beschränkten Bereich konvergent, so sind die Perioden an den Querschnitten B_l

$$\int_{B_l} d\,w_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_{n\,m}\, a_{m\,l} = i\,\delta_{n\,l} \text{ für } l > 0, \text{ bzw.}$$

$$\int_{B_0} d\,w_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_{n\,m}\, a_{0\,m} = -\,i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{n\,m}\, h_{m\,k} = -i.$$

Es sind dann also die w_n *in Bezug auf die Querschnitte* B_l *normierte Integrale.*

Wir berechnen das *Dirichlet*sche Integral $D(v)$ eines beschränkten Integrals

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n\, v_{n-1,\,n}$$

über die Fläche F. Wir verwenden dazu die Querschnittfolgen $B_1\, B_2 \ldots$ und $A'_1\, A'_2 \ldots$, wo A'_n das Intervall $[\alpha_0\, \alpha_{2n-1}]$ im negativen Sinn auf dem ersten Blatt umlaufe. Dann ist

$$\int_{B_m} d\,v = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n\, a_{n\,m} = P'_m + i\,P''_m \text{ und}$$

$$\int_{A'_m} d\,v = \sum_{l=0}^{m-1} \int_{A_l} d\,v = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \int_{A_l} d\,v_{n-1,\,n} = \sum_{l=0}^{m-1} (\sigma_{l+1} - \sigma_l) = \sigma_m = \sigma'_m + i\,\sigma''_m.$$

Für die endliche Summe

$$v^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n \, v_{n-1,\,n} = v_1 + i\, v_2$$

strebt nun das Integral über den Rand K einer Kreisscheibe $|z| < R$ aus F

$$\int_K v_1 \, d\, v_2 \to 0$$

für $R \to \infty$, und zwar auf Grund unserer Bemerkung am Ende von I. Also reduziert sich das *Dirichlet*sche Integral von $v^{(N)}$ über diese Kreisscheibe beim Übergang zu den Randintegralen in der bekannten Weise auf die Glieder mit den Perioden und es ist das *Dirichlet*sche Integral über F

$$D(v^{(N)}) = \sum_{m=1}^{N} (\sigma'_m \, P''_m - \sigma''_m \, P'_m) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} h_{n\,m} \, (\sigma'_n \, \sigma'_m + \sigma''_n \, \sigma''_m).$$

Ist nun $\mathfrak{H}$ beschränkt und $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \, \bar{\sigma}_n$ endlich, so konvergiert die angeschriebene Doppelsumme für $N \to \infty$ gegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h_{n\,m} \, \sigma_n \, \bar{\sigma}_m = D.$$

Nun konvergiert das *Dirichlet*sche Integral von $v^{(N)}$ über jeden beschränkten Bereich B von F mit $N \to \infty$ gegen das *Dirichlet*sche Integral von v über B, also

$$D_B(v^{(N)}) \to D_B(v).$$

Es ist

$$D_B(v^{(N)}) \leqq D(v^{(N)})$$

und wegen

$$D(v^{(N)}) \to D$$

auch

$$D_B(v) \leqq D$$

für jedes B, also auch

$$D(v) \leqq D.$$

Ebenso ist dann

$$D(v - v^{(N)}) = D\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \sigma_n \, v_{n-1,\,n}\Big) \leqq \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} h_{n\,m} \, \sigma_n \, \bar{\sigma}_m,$$

also beliebig klein für hinreichend große N. Wegen der Dreiecksungleichung für die Wurzeln der *Dirichlet*schen Integrale

$$\sqrt{D(v)} \geqq \sqrt{D(v^{(N)})} - \sqrt{D(v - v^{(N)})}$$

ist zusammen mit dem Vorigen

$$D(v) = D:$$

Ist $\mathfrak{A}$ *beschränkt und* $v = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n v_{n-1,n}$ *ein beschränktes Integral mit endlicher* $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \bar{\sigma}_n$, *so ist das Dirichlet*sche *Integral über* F *von* v

$$D(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h_{n\,m}\, \sigma_n \bar{\sigma}_m,$$

also endlich.

Ist andererseits $\mathfrak{A}$ definit, so gibt es ein $A > 0$, so daß stets

$$\sum_{n,\,m=1}^{N} h_{n\,m}\, \sigma_n \bar{\sigma}_m \geqq A \sum_{n=1}^{N} \sigma_n \bar{\sigma}_n;$$

es ist daher für die Teilsumme $v^{(N)}$ eines beschränkten Integrals $v = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n v_{n-1,n}$ das *Dirichlet*sche Integral

$$D(v^{(N)}) \geqq A \sum_{n=1}^{N} \sigma_n \bar{\sigma}_n;$$

ist also $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \bar{\sigma}_n = +\infty$, so strebt $D(v^{(N)}) \to +\infty$. Wäre $D(v) < +\infty$, so wäre wegen $D(v - v^{(N)}) \geqq (\sqrt{D(v)} - (\sqrt{D(v^{(N)})})^2$ auch

$$D(v - v^{(N)}) \to +\infty,$$

während die $v - v^{(N)}$ gleichmäßig auf $\bar{F}$ beschränkt und auf jedem beschränkten Gebiet gleichmäßig gegen Null streben.

Ein einfaches Beispiel für ein beschränktes Integral mit unendlichem *Dirichlet*schen Integral ist

$$v = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\cos z}}.$$

Die Verzweigungspunkte erstrecken sich hier nach beiden Seiten der reellen Achse ins Unendliche, was gewisse Änderungen in den obigen Rechnungen notwendig macht. Wie man sich leicht überzeugt, ist v beschränkt und wegen der konstanten Perioden ist bei der Darstellung von v durch die Normalintegrale

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c\, v_{2n-1,\,2n},$$

also $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \bar{\sigma}_n = +\infty$. Unser Integral bildet eine Halbebene von F auf ein unendlichoft überdecktes Quadrat ab, das sich um den Mittelpunkt als Bildpunkt des unendlichfernen Punktes herumwindet; der Flächeninhalt ist also $D(v) = +\infty$.

Das Analogon zu einem Satz von Cesàro über Bertrand-Kurven im Bereich der Strahlflächen.

Von
Erwin Kruppa, Wien.

(Eingelangt am 23. Juli 1949.)

Eine von Cesàro[1] behandelte Frage lautet: „*Gegeben ist eine im begleitenden Dreikant einer Raumkurve feste Gerade a. Unter welcher Bedingung beschreiben ihre Punkte beim Gleiten des Dreikants längs der Kurve Bahnkurven, die a stets rechtwinklig schneiden, und was ist die Menge aller Geraden dieser Art?*" *Diese Frage führt i. a. zu den Bertrand-Kurven*[2].

Im folgenden wird das Analogon zu dieser Fragestellung im Bereich der Strahlflächen behandelt. Zur Gewinnung von Analogien zwischen Raumkurven und Strahlflächen empfiehlt es sich, ein Verfahren anzuwenden, das ich an anderer Stelle[3] ausführlich dargelegt habe. Es seien u die Bogenlänge auf der Striktionslinie, $\mathfrak{e}(u)$, $\mathfrak{n}(u)$, $\mathfrak{z}(u)$ die Einsvektoren der Erzeugenden, der Zentralnormalen, der Zentraltangente. Die Richtungen von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{n}$ seien willkürlich wählbar und $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$ sollen ein Rechtssystem bilden. Wir bilden $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{z}$ auf die Einskugel ab und bezeichnen die Bogenlängen auf den Bildkurven c_1, c_3 mit u_1, bzw. u_3. Bedeuten

$$\varkappa = \frac{d\,u_1}{d\,u}, \quad \varkappa_1 = \frac{d\,u_3}{d\,u}, \tag{1}$$

---

[1] *E. Cesàro*, Vorlesungen über natürliche Geometrie (deutsch von *G. Kowalewski*) 1926, § 142.

[2] Eine auch von *Cesàro* stammende, zur obigen verwandte Frage führt zu den sogenannten *Cesàro*-Kurven. Über ihre Analoga im Bereich der Strahlflächen vgl. *E. Kruppa*, Strahlflächen als Verallgemeinerungen der *Cesàro*-Kurven, Mh. Math. 52 (1948), 323—336.

[3] *E. Kruppa*, Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven, S.-B. Akad. Wiss., Wien, math nat. IIa Bd. 157 (1948). Dazu auch *G. Sannia*, Una rappresentatione intrinseca delle rigate (Giorn. Mat. (1925) 31—47. Das Verfahren läßt sich auch in die von *W. Blaschke*, Vorl. üb. Differentialgeometrie, I, § 121 entwickelte Theorie der Strahlflächen durch Normierung des Parameters einordnen.

so nennen wir $\varkappa$ die Krümmung, $\varkappa_1$ die Torsion der Strahlfläche in der Erzeugenden.

$$\varkappa_2 = \frac{d u_3}{d u_1} \tag{1a}$$

ist die konische Krümmung ihres Richtkegels. Es ist leicht einzusehen, daß für jedes u die Tangenten in den entsprechenden Punkten von c_1 und c_3 zur Zentralnormalen parallel sind. Wir können daher die Bogenlänge u_1 auf c_1 in der Richtung von $\mathfrak{n}$, die Bogenlänge u_3 auf c_3 in der entgegengesetzten Richtung wachsen lassen. Für den Richtkegel $\mathfrak{e}(u_1)$ gelten dann die Ableitungsgleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{e}}{du_1} = \mathfrak{n}, \quad \frac{d\mathfrak{n}}{du_1} = -\mathfrak{e} + \varkappa_2 \mathfrak{z}, \quad \frac{d\mathfrak{z}}{du_1} = -\varkappa_2 \mathfrak{n}. \tag{2}$$

Kennzeichnet man die Ableitungen nach u durch einen Punkt und beachtet man, daß (1) und (1a) $\varkappa_1 = \varkappa \varkappa_2$ ergeben, so erhält man aus (2) die Ableitungsgleichungen des begleitenden Dreibeins der Strahlfläche:

$$\dot{\mathfrak{e}} = \varkappa \mathfrak{n}, \quad \dot{\mathfrak{n}} = -\varkappa \mathfrak{e} + \varkappa_1 \mathfrak{z}, \quad \dot{\mathfrak{z}} = -\varkappa_1 \mathfrak{n}, \tag{3}$$

die formal mit den *Frenet*schen Formeln der Kurventheorie vollständig übereinstimmen.

Es sei nun $\sigma(u) = \sphericalangle\, \mathfrak{t}\mathfrak{e}$ der Winkel zwischen dem Tangentenvektor der Striktionslinie und der zugehörigen Erzeugenden, wobei der positive Drehsinn $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{e}$ durch einen rechten Winkel dreht. $\sigma(u)$ heiße die Striktion der Strahlfläche in der Erzeugenden u. Es ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma$; die Striktionslinie läßt sich daher darstellen durch den Ortsvektor

$$\bar{\mathfrak{s}}(u) = \int (\mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma)\, du, \tag{4}$$

und die Strahlfläche durch

$$\mathfrak{x} = \int (\mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma)\, du + v\mathfrak{e}. \tag{5}$$

mit den Ableitungsgleichungen (3).

Die zur Fragestellung von *Cesàro* analoge Frage im Bereich der Strahlflächen lautet: „*Gegeben ist eine im begleitenden Dreikant einer Strahlfläche feste Gerade a. Unter welcher Bedingung beschreiben ihre Punkte beim Gleiten des Dreikants längs der Strahlfläche Bahnkurven, die a stets rechtwinklig schneiden, und was ist die Menge aller Geraden dieser Art?*"

Eine stetige Bewegung im Raum kann in jedem Augenblick i. a. als Momentanschraubung aufgefaßt werden. Das Problem kann also auch so gestellt werden: „*Unter welcher Bedingung gehört eine im begleitenden*

Dreikant einer Strahlfläche feste Gerade beim Gleiten des Dreikantes längs der Strahlfläche stets dem Normalengewinde der jeweiligen Momentanschraubung an?"

Es sei $(S;\ \mathfrak{e},\ \mathfrak{n},\ \mathfrak{z})$ das begleitende Dreikant im Punkt S der Striktionslinie $\mathfrak{s}(u)$ einer Strahlfläche $\mathfrak{F}$ und a eine im Dreikant feste Gerade. Fassen wir es zugleich als Achsenkreuz $x,\ y,\ z$ auf, so können wir a durch einen Punkt $X,\ Y,\ Z$ und den Einsvektor $\mathfrak{a}\ (a_1,\ a_2,\ a_3)$ festlegen. Damit ist a durch

$$x = X + \lambda a_1,\ y = Y + \lambda a_2,\ z = Z + \lambda a_3 \tag{6}$$

gegeben. Der Punkt $P(x, y, z)$ von a hat im „festen Raum", dem $\mathfrak{F}$ angehört, den Ortsvektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{s} + x\,\mathfrak{e} + y\,\mathfrak{n} + z\,\mathfrak{z}. \tag{7}$$

Gleitet nun $(S;\ \mathfrak{e},\ \mathfrak{n},\ \mathfrak{z})$ längs $\mathfrak{F}$, so wird die Richtung der Bahntangente von P durch den gemäß (3) und (5) zu berechnenden Vektor

$$\dot{\mathfrak{x}} = (\cos\sigma - y\,\varkappa)\,\mathfrak{e} + (x\,\varkappa - z\,\varkappa_1)\,\mathfrak{n} + (\sin\sigma + y\,\varkappa_1)\,\mathfrak{z} \tag{8}$$

gegeben. Soll nun in allen Punkten der Geraden a die Bahntangente zu a normal sein, so hat man in (8) $x,\ y,\ z$ durch (6) auszudrücken und $\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{a} = 0$ anzusetzen. Dabei fällt λ heraus und man erhält die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$a_1\cos\sigma + a_3\sin\sigma + (a_2 X - a_1 Y)\,\varkappa + (a_3 Y - a_2 Z)\,\varkappa_1 = 0. \tag{9}$$

Da die Gerade a als gegeben anzusehen ist, hat (9) mit den Konstanten $C,\ C_1,\ K,\ K_1$ die Form:

$$C\cos\sigma + C_1\sin\sigma + K\,\varkappa + K_1\,\varkappa_1 = 0; \tag{10}$$

$$C : C_1 : K : K_1 = a_1 : a_3 : (a_2 X - a_1 Y) : (a_3 Y - a_2 Z).$$

Die Gleichungen (10) enthalten die Antwort auf die gestellte Frage. Aus ihnen sind alle Einzelheiten zu erschließen. In ihnen ist auch als Sonderfall für $\sin\sigma = 0$ das Problem von *Cesàro* enthalten. Denn für $\sin\sigma = 0$ ist die Strahlfläche die Tangentenfläche einer Raumkurve, mit $\varkappa,\ \varkappa_1$ als Krümmung und Torsion, mit $\mathfrak{e},\ \mathfrak{n},\ \mathfrak{z}$ als Einsvektoren der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen. Wir bestätigen zunächst mittels (10) die von *Cesàro* über Kurven gemachten Aussagen. (10) hat für $C \neq 0$, $\sin\sigma = 0$ i. a. die Form[4]

[4] Angeschriebene Konstante werden stets als von Null verschieden angenommen.

$$1 + k\varkappa + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{11}$$
$$a_2 X - a_1 Y = a_1 k, \quad a_3 Y - a_2 Z = a_1 k_1.$$

Daraus ersieht man, daß die gesuchten Kurven i. a. Bertrand-Kurven sind, und daß die gesuchten Geraden das hyperbolische Strahlnetz

$$a_1 : a_2 : a_3 = X\,Y : (k + Y)\,Y : (k\,Z + Y\,Z + k_1 X)$$

mit den Brennlinien $x = 0$, $y + k = 0$ und $y = 0$, $k_1 x + k z = 0$ bilden.

Im Sonderfall $k = 0$ hat die Kurve konstante Torsion. Die gesuchten Geraden bilden jetzt das parabolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = X\,Y : Y^2 : (Y\,Z + k_1 X)$, dessen Brennlinie die Binormale $x = 0$, $y = 0$ ist.

Für $C = 0$ hat (10) mit $\sin\sigma = 0$ die Form

$$\varkappa + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{12}$$
$$a_1 = 0, \quad a_3 Y - a_2 Z = a_2 X k_1.$$

Die Kurve ist daher eine Böschungslinie (Richtkegel ein Drehkegel) und die gesuchten Geraden bilden das hyperbolische Strahlennetz $a_1 : a_2 : a_3 = 0 : Y : (k_1 X + Z)$, dessen Brennlinien die Ferngerade der Normalebene $x = 0$ und die Erzeugende $y = 0$, $k_1 x + z = 0$ des rektifizierenden Zylinders ist.

Die Fälle $C = K_1 = 0$ und $C = K = 0$, in denen die Kurve gerade oder eben ist, können übergangen werden. Für den Fall $C = K = K_1 = 0$, in dem $a_1 = 0$, $a_2 X = 0$, $a_3 Y - a_2 Z = 0$ ist, gilt für $a_2 \neq 0$, $a_1 : a_2 : a_3 = 0 : Y : Z$ und für $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ und $Y = 0$. Demnach sind bei jeder Raumkurve zumindest die Kurvennormalen in der Normalebene und die Parallelen zur Binormalen in der rektifizierenden Ebene die Lösungen des Problems von *Cesàro*.

Im folgenden untersuchen wir die durch (10) bestimmten Strahlflächen und die zugehörigen Geraden.

I. Allgemeiner Fall:

$$c\cos\sigma + \sin\sigma + k\varkappa + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{13}$$
$$a_1 = c\,a_3, \quad a_2 X - a_1 Y = a_3 k, \quad a_3 Y - a_2 Z = a_3 k_1.$$

Für $X = 0$ ist daher $c\,Y + k = 0$. Die gesuchten Geraden schneiden somit die Gerade f_1 mit den Gleichungen $x = 0$, $c\,y + k = 0$. Ebenso ergibt sich, daß sie sich auch auf die Geraden f_2 ($y = 0$, $k_1 x + k z = 0$ und f_3 ($z = 0$, $y - k_1 = 0$) stützen. Für einen Punkt von f_3 mit der Abszisse x hat die durch ihn gehende Gerade die Richtung

$$a_1 : a_2 : a_3 = c\,x : (k + c\,k_1) : x. \tag{14}$$

Die Menge der gesuchten Geraden a ist daher für $k + c\,k_1 \neq 0$, die sich auf f_1, f_2, f_3 stützende Erzeugendenschar des hyperbolischen Paraboloids

$$y\,(c\,z - x) + k_1\,x + k\,z = 0. \tag{15}$$

Im Sonderfall $k + c\,k_1 = 0$ geht (14) in $a_1 : a_2 : a_3 = c : 0 : 1$ über. Die gesuchten Geraden bilden daher ein Büschel paralleler Geraden in der Ebene $y = k_1$.

Da (13) für $\sin\sigma = 0$ in die Definitionsgleichung der *Bertrand*-Kurven übergeht, ist der Gedanke naheliegend, in den durch (13) gekennzeichneten Strahlflächen das Analogon zu den *Bertrand*-Kurven im Bereich der Strahlflächen zu erblicken. Das ist aber, wie nun näher ausgeführt werden soll, nur in dem soeben betrachteten Sonderfall $k + c\,k_1 = 0$ sinnvoll.

Wenn man nach einer Gattung von Strahlflächen fragt, die den *Bertrand*-Kurven analog sein sollen, so wird man naturgemäß von folgender Aufgabe ausgehen: „*Man untersuche, ob es zu einer gegebenen Strahlfläche* $\mathfrak{F}\,(\varkappa, \varkappa_1, \sigma)$ *eine zweite* $\mathfrak{F}^*\,(\varkappa^*, \varkappa_1^*, \sigma^*)$ *derart gibt, daß* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}^*$ *eine gemeinsame Zentralnormalenfläche besitzen*". Ich habe diese Frage in meiner in Anmerkung 3 genannten Arbeit eingehend behandelt. Es ergibt sich:

$$\varkappa^* = \frac{\varkappa\cos\omega_0 + \varkappa_1\sin\omega_0}{\sqrt{(\cos\sigma - v_0\,\varkappa)^2 + (\sin\sigma + v_0\,\varkappa_1)^2}}, \tag{16}$$

$$\varkappa_1^* = \frac{-\varkappa\sin\omega_0 + \varkappa_1\cos\omega_0}{\sqrt{(\cos\sigma - v_0\,\varkappa)^2 + (\sin\sigma + v_0\,\varkappa_1)^2}}, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg}(\sigma^* - \omega_0) = \frac{\sin\sigma + v_0\,\varkappa_1}{\cos\sigma - v_0\,\varkappa}. \tag{18}$$

Darin bedeutet v_0 die konstante Entfernung der auf den einzelnen Zentralnormalen liegenden Zentralpunkte von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ und ω_0 den konstanten Winkel der entsprechenden Erzeugenden. Die Flächenpaare $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ zeigen demnach das Analogon zu einer charakteristischen Eigenschaft der *Bertrand*-Kurven, sie gehören aber keiner besonderen Klasse von Strahlflächen an, da zu jeder Fläche $\mathfrak{F}$ durch die Wahl von v_0, ω_0 zweifach unendlichviele Flächen $\mathfrak{F}^*$ gehören.

Dagegen erhalten wir eine Klasse von Strahlflächen $\mathfrak{F}$, die man mit vollem Recht als das Analogon zu den *Bertrand*-Kurven ansprechen kann, wenn man $\mathfrak{F}^*$ als Torse vorschreibt. Die Frage lautet dann: „*Unter welcher Bedingung existiert zu einer gegebenen Strahlfläche* $\mathfrak{F}$ *eine*

Kurve c^*, so daß die Zentralnormalfläche von $\mathfrak{F}$ die Hauptnormalenfläche von c^* ist?" Dazu hat man einfach in (18) $\sigma^* = 0 \pmod{\pi}$ zu setzen, und erhält:

$$\operatorname{tg}\omega_0 \cos\sigma + \sin\sigma - \varkappa v_0 \operatorname{tg}\omega_0 + \varkappa_1 v_0 = 0. \tag{19}$$

Diese Gleichung hat die Form (13)

$$c\cos\sigma + \sin\sigma + k\varkappa + k_1\varkappa_1 = 0$$

mit $$c = \operatorname{tg}\omega_0, \quad k = -v_0 \operatorname{tg}\omega_0, \quad k_1 = v_0$$

Es ist demnach $k + c\,k_1 = 0$, d. i. aber gerade die Bedingung für den oben betrachteten Sonderfall unseres Problems[5].

(18) liefert für $\sigma = \sigma^* = 0 \pmod{\pi}$ die bekannte Bedingung für *Bertrand*-Kurven

$$v_0\varkappa - \varkappa_1 v_0 \operatorname{ctg}\omega_0 = 1. \tag{20}$$

II. $$C = 0;\ \sin\sigma + k\varkappa + k_1\varkappa_1 = 0. \tag{21}$$

Es ist in (14) und (15) $c = 0$ zu setzen. Die gesuchten Geraden sind die Erzeugenden des gleichseitigen Paraboloids $xy - k_1 x - kz = 0$, die zur Polarebene $x = 0$ parallel sind.

III. $$C_1 = 0;\ \cos\sigma + k\varkappa + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{22}$$
$$a_3 = 0, \quad a_2 X - a_1 Y = a_1 k, \quad -a_2 Z = a_1 k_1.$$

Die gesuchten Geraden stützen sich daher auf die Geraden $f_1\,(x = 0,\ y + k = 0)$, $f_2\,(y = 0,\ k_1 x + k z = 0)$ und auf die Ferngerade der asymptotischen Ebene $z = 0$ und gehören dem gleichseitigen Paraboloid $yz + k_1 x + k z = 0$ an.

IV. $$K_1 = 0;\ c\cos\sigma + \sin\sigma + k\varkappa = 0; \tag{23}$$
$$a_1 = a_3 c,\ a_2 X - a_1 Y = a_3 k,\ a_3 Y - a_2 Z = 0.$$

Die gesuchten Geraden stützen sich auf die Erzeugende $y = 0$, $z = 0$, auf die Gerade $x = 0$, $c\,y + k = 0$ und auf die Ferngerade der Ebene $x = c\,z$. Sie gehören dem hyperbolischen Paraboloid $y\,(c\,z - x) + kz = 0$ an.

V. $$K = 0;\ c\cos\sigma + \sin\sigma + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{24}$$
$$a_1 = a_3 c,\ a_2 X - a_1 Y = 0,\ a_3 Y - a_2 Z = a_3 k_1.$$

Für $X = 0$ ist $Y = 0$ und umgekehrt. Für $Z = 0$ ist $Y = k_1$. Die gesuchten Geraden stützen sich daher auf die Zentraltangente $x = 0$,

---

[5] Näheres über diese Klasse von Strahlflächen in meiner in Anmerkung 3) genannten Arbeit.

$y = 0$, auf die Gerade $z = 0$, $y - k_1 = 0$ und auf die Ferngerade der Ebene $x = c\,z$. Sie gehören dem hyperbolischen Paraboloid $y(cz - x) + + k_1 x = 0$ an.

VI. $$\cos\sigma = 0,\ C_1 + K\varkappa + K\varkappa_1 = 0. \tag{25}$$

In diesem Fall ist die Strahlfläche die Binormalenfläche einer Raumkurve c. Die Erzeugende ist die Binormale, die Zentralnormale die Hauptnormale und die Zentraltangente die Tangente von c. Es lassen sich daher die Ergebnisse des obigen von *Cesàro* behandelten Kurvenproblems sinngemäß auf den vorliegenden Fall übertragen.

VII. $$\varkappa_1 = 0,\ C\cos\sigma + C_1\sin\sigma + K\varkappa = 0. \tag{26}$$

$\varkappa_1 = 0$ ist die Bedingung dafür, daß die Strahlfläche konoidal ist, d. h. eine Richtebene besitzt.

Für $C_1 \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} &\varkappa_1 = 0, \qquad c\cos\sigma + \sin\sigma + k\varkappa = 0; \\ &a_1 = c\,a_3, \quad a_2 X - a_1 Y = a_3 k. \end{aligned} \tag{27}$$

Die gesuchten Geraden bilden daher das hyperbolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = c\,X : (k + c\,Y) : X$, dessen Brennlinien die Ferngerade der Ebene $x - c\,z = 0$ und die Gerade $x = 0$, $c\,y + k = 0$ sind.

Im Sonderfall $k = 0$ ist die Fläche konoidal und von konstanter Striktion. Im Sonderfall $c = 0$ liegt die Strahlfläche

$$\begin{aligned} &\varkappa_1 = 0, \qquad \sin\sigma + k\varkappa = 0; \\ &a_1 = 0, \qquad a_2 X = k\,a_3 \end{aligned} \tag{28}$$

vor. $\sin\sigma : \varkappa$ ist der Drall einer Strahlfläche. Die Fläche ist also konoidal und von konstantem Drall. Die gesuchten Geraden bilden das parabolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = 0 : k : X$ mit der Ferngeraden der Polarebene $x = 0$ als Brennlinie.

Für $C_1 = 0$ haben wir:

$$\begin{aligned} &\varkappa_1 = 0, \qquad \cos\sigma + k\varkappa = 0; \\ &a_3 = 0, \qquad a_2 X - a_1 Y = a_1 k. \end{aligned} \tag{29}$$

$\cos\sigma : \varkappa$ ist im Bereich der Strahlflächen das Analogon zum Krümmungsradius der Kurventheorie. Ich habe dafür die Bezeichnung „polarer Krümmungsradius" vorgeschlagen[3]. Die Flächen (29) sind also konoidal und von konstantem polaren Krümmungsradius. Die gesuchten Geraden bilden das hyperbolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = X : (Y + k) : 0$, dessen Brennlinien die Ferngerade der Richtebene $z = 0$ und die Polarachse $x = 0$, $y + k = 0$ sind.

Die weiteren Fälle $C = C_1 = 0$, $C = K = 0$, $C_1 = K = 0$ sind belanglos. Schließlich ist noch der Fall $C = C_1 = K = 0$ zu erledigen. Es ist $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 X = 0$. Daraus folgt $a_2 = 1$, $X = 0$. Also sind bei jeder konoidalen Fläche zumindest die Parallelen zur Zentralnormalen in der Polarebene $x = 0$ die Lösungen der Aufgabe.

VIII. $\qquad C\cos\sigma + C_1 \sin\sigma = 0, \qquad K\varkappa + K_1 \varkappa_1 = 0.$

Die erste Gleichung besagt, daß die Fläche konstante Striktion hat, die zweite, daß ihr Richtkegel ein Drehkegel ist. Es ist also i. a.

$$c\cos\sigma + \sin\sigma = 0, \qquad k\varkappa + \varkappa_1 = 0;$$
$$a_1 = a_3 c, \qquad a_2 X - a_1 Y = k\,(a_3 Y - a_2 Z). \tag{30}$$

Die gesuchten Geraden bilden demnach das hyperbolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = (k Z + X)\, c : (k + c)\, Y : (k Z + X)$, dessen Brennlinien die Ferngerade der Ebene $x = c z$ und die Erzeugende $y = 0$, $x + k z = 0$ der Zentraltorse sind, vorausgesetzt, daß $k + c \neq 0$ ist.

Für $k + c = 0$ ist $c\cos\sigma + \sin\sigma = 0$, $c\varkappa - \varkappa_1 = 0$. Die gesuchten Geraden bilden das Bündel paralleler Geraden, deren Richtung $a_1 : a_2 : a_3 = c : 0 : 1$ zur Tangente der Striktionslinie und zur Zentralnormalen normal ist.

Von den Fällen, in denen verschwindende Konstanten vorkommen, interessieren nur $K = K_1 = 0$ und $C = C_1 = 0$.

$$K = K_1 = 0; \qquad c\cos\sigma + \sin\sigma = 0; \tag{31}$$
$$a_1 = a_3 c, \qquad a_2 X - a_1 Y = 0, \qquad a_3 Y - a_2 Z = 0.$$

Also sind bei jeder Strahlfläche konstanter Striktion die gesuchten Geraden zumindest die Normalen $a_1 : a_2 : a_3 = c : 0 : 1$ zur Tangente der Striktionslinie in der Zentralebene und die Geraden durch den Zentralpunkt in der Ebene $x = c z$.

$$C = C_1 = 0; \qquad k\varkappa + \varkappa_1 = 0; \tag{32}$$
$$a_1 = a_3 = 0, \qquad X = -k Z.$$

Also sind bei jeder Strahlfläche, deren Richtkegel ein Drehkegel ist, die gesuchten Geraden zumindest die Parallelen zur Zentralnormalen in der Ebene $x + k z = 0$, die die Zentralnormale mit der Erzeugenden der Zentraltorse verbindet.

IX. $\qquad C\cos\sigma + K\varkappa = 0, \qquad C_1 \sin\sigma + K_1 \varkappa_1 = 0.$

Diese Gleichungen besagen, daß die polaren Krümmungsradien der Strahlfläche und ihrer Zentraltangentenfläche konstant sind.

Es gilt i. a.

$$\cos\sigma + k\varkappa = 0, \qquad \sin\sigma + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{33}$$
$$a_2 X - a_1 Y = a_1 k, \qquad a_3 Y - a_2 Z = a_3 k_1.$$

Die gesuchten Geraden bilden das hyperbolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = X(Y - k_1) : (Y + k)(Y - k_1) : (Y + k)Z$, dessen Brennlinien die Erzeugende $x = 0$, $y + k = 0$ der Polartorse der Strahlfläche und die Erzeugende $z = 0$, $y - k_1 = 0$ der Polartorse ihrer Zentraltangentenfläche sind. Von den Fällen, in denen die Konstanten zum Teil verschwinden, interessieren $C_1 = K_1 = 0$ und $C = K = 0$.

$$C_1 = K_1 = 0; \qquad \cos\sigma + k\varkappa = 0; \tag{34}$$
$$a_3 = 0, \qquad a_2 X - a_1 Y = a_1 k, \qquad a_2 Z = 0.$$

Also sind bei jeder Strahlfläche mit konstantem polaren Krümmungsradius die gesuchten Geraden zumindest die Parallelen zur Erzeugenden in der Ebene $y + k = 0$ durch die Polarachse und die Strahlen des Büschels in der asymptotischen Ebene $z = 0$, dessen Scheitel die polare Krümmungsmitte $x = 0$, $y = -k$, $z = 0$ ist.

$$C = K = 0; \qquad \sin\sigma + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{35}$$
$$a_1 = 0, \qquad a_2 X = 0, \qquad a_3 Y - a_2 Z = a_3 k_1.$$

Also sind bei jeder Strahlfläche, deren Zentraltangentenfläche konstanten Krümmungsradius besitzt, die gesuchten Geraden zumindest die Parallelen zur Zentraltangente in der Ebene $y - k_1 = 0$ durch die Polarachse der Zentraltangentenfläche und die Strahlen des Büschels in der Polarebene $x = 0$, dessen Scheitel die polare Krümmungsmitte $x = 0$, $y = k_1$, $z = 0$ der Zentraltangentenfläche ist.

X. $\quad C\cos\sigma + K_1\varkappa_1 = 0, \qquad C_1\sin\sigma + K\varkappa = 0.$

Diese Gleichungen besagen, daß die Zentraltangentenfläche der Strahlfläche und diese selbst konstanten Drall besitzen. Es gilt i. a.

$$\cos\sigma + k_1\varkappa_1 = 0, \qquad \sin\sigma + k\varkappa = 0; \tag{36}$$
$$a_3 Y - a_2 Z = a_1 k, \qquad a_2 X - a_1 Y = a_3 k.$$

Die gesuchten Geraden bilden somit das Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = (X\,Y - k\,Z) : (k\,k_1 + Y^2) : (Y\,Z + k_1\,X)$ mit den Brennlinien $y = \pm\sqrt{-kk_1}$, $kz = \pm x\sqrt{-kk_1}$.

Im besonderen sind die Fälle $C = K_1 = 0$ und $C_1 = K = 0$ zu behandeln.

$$C = K_1 = 0; \qquad \sin\sigma + k\varkappa = 0; \tag{37}$$
$$a_1 = 0, \qquad a_2 X = a_3 k, \qquad a_3 Y - a_2 Z = 0.$$

Daraus folgt: $a_1 : a_2 : a_3 = 0 : k : X = 0 : Y : Z$. Also sind bei den Strahlflächen konstanten Dralls die gesuchten Geraden zumindest die Erzeugenden des gleichseitigen Paraboloids $xy - kz = 0$, die zur Polarebene $x = 0$ parallel sind.

$$C_1 = K = 0; \qquad \cos\sigma + k_1 \varkappa_1 = 0; \tag{38}$$
$$a_3 = 0, \qquad a_2 X - a_1 Y = 0, \qquad -a_2 Z = a_1 k_1.$$

Daraus folgt $a_1 : a_2 : a_3 = X : Y : 0 = -Z : k_1 : 0$. Also sind bei den Strahlflächen, deren Zentraltangentenflächen konstanten Drall besitzen, die gesuchten Geraden zumindest die Erzeugenden des gleichseitigen Paraboloides $yz + k_1 x = 0$, die zur asymptotischen Ebene parallel sind.

XI. Trivialer Fall.

$$C = C_1 = K = K_1 = 0; \tag{39}$$
$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad X = 0, \quad Z = 0.$$

Daraus folgt, daß bei jeder Strahlfläche zumindest die Zentralnormale Lösung der Aufgabe ist.

Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind.

Von
W. Wunderlich, Wien.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 27. Juli 1949.)

I. Einleitung.

Unter den „pseudogeodätischen Linien" einer Fläche werden jene Flächenkurven verstanden, deren Schmiegebenen unter einem festen Winkel γ gegen die Trägerfläche geneigt sind. Diese Linien vermitteln sozusagen den Übergang von den *echten Geodätischen* ($\gamma = \pi/2$) zu den *Haupttangenten-* oder *Asymptotenkurven* ($\gamma = 0$) der Fläche. Sie sind offenbar auch dadurch ausgezeichnet, daß längs ihres ganzen Verlaufes die geodätische und die wahre Torsion übereinstimmen.

Daß das Studium dieser bisher kaum beachteten Flächenkurven durchaus lohnend sein kann, geht aus zwei Abhandlungen des Verfassers hervor, die den pseudogeodätischen Linien von Zylindern[1], bzw. Kegeln[2] gewidmet sind und speziell bei den Drehflächen unter diesen eine Fülle von bemerkenswerten Beziehungen aufgedeckt haben. —

Sei k die Pseudogeodätische eines *Kegels* mit dem Scheitel O. Transformieren wir ihre Tangenten mittels des Polarsystems einer *Kugel* um O, so erhalten wir die Tangenten einer neuen Kurve l, die die Erzeugenden ihres Verbindungskegels mit O unter konstantem Winkel durchsetzt; der zu einer Tangente t von k gehörigen Schmiegebene σ, bzw. Kegeltangentialebene τ entsprechen nämlich als Pole der Berührungspunkt S, bzw. der Fernpunkt T der reziproken Tangente $\bar{t}$, und es ist $\sphericalangle SOT = \sphericalangle \sigma\,\tau = \gamma$. Damit haben wir einen für das Folgende

---

[1] Pseudogeodätische Linien auf Zylinderflächen. Sitz.-Ber. Ak. Wiss., Wien (im Druck). Vorankündigung im Akad. Anzeiger Nr. 7 (1948).

[2] Pseudogeodätische Linien auf Kegelflächen. Sitz.-Ber. Ak. Wiss., Wien (im Druck). Vorankündigung im Akad. Anzeiger Nr. 9 (1949).

grundlegenden Zusammenhang mit den Kegel- oder Bündelloxodromen hergestellt:

Satz 1. *Wird eine Kegelloxodrome l an einer Kugel um den Kegelscheitel O polarisiert, so entsteht eine Pseudogeodätische auf einem anderen von O ausstrahlenden Kegel; der Schnittwinkel von l und die Schmiegebenenneigung von k stimmen überein. Alle Kegelpseudogeodätischen lassen sich auf diese Weise gewinnen*[2].

Unter den *Kegelloxodromen* — von denen man übrigens nicht allzu viel weiß — nehmen nun jene Raumkurven eine besondere Stellung ein, welche Loxodromen zweier Kegel sind. Sie sind von *E. Cesàro* und neuerdings auch vom Verfasser betrachtet worden und erfreuen sich zahlreicher ausgezeichneter Eigenschaften[3]. Unter diesen Umständen liegt es nicht allzu fern, analog nach jenen Raumkurven zu fragen, welche *Pseudogeodätische* zweier Kegel sind. Dieses Problem wird in der vorliegenden Arbeit vollständig gelöst. Den Schlüssel zur Behandlung liefert der vorhin ausgesprochene Satz 1.

Wenn diese „bikonischen Pseudogeodätischen" auch in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit den erwähnten „polykonischen Loxodromen" stehen, so sind sie doch ebenfalls durch eine Reihe bemerkenswerter geometrischer Eigenschaften ausgezeichnet, und ebenso die zu ihnen polaren Kegelloxodromen. Als Sonderformen werden unter den in Frage stehenden Kurven die echten *Geodätischen auf Drehflächen 2. Grades* zu finden sein, die sich als Pseudogeodätische auf den Verbindungskegeln mit den beiden Flächenbrennpunkten erweisen, wie auch schon an anderem Orte bemerkt wurde[4].

Raumkurven, die gleichzeitig Pseudogeodätische eines Kegels und eines Zylinders sind, lassen sich durch einen Grenzprozeß aus den

---

[3] *E. Cesàro*, Analisi intrinseca delle eliche policoniche. Rend. acc. sci. fis. mat. Napoli, ser. III, **9** (1903).

W. Wunderlich, Über die polykonischen Loxodromen. Ann. di mat. (im Druck).

Diese Kurven erweisen sich übrigens als Loxodromen dreier Kegel (von denen einer in einen Zylinder ausarten kann). Zu ihnen zählen als wichtige Sonderfälle die *sphärischen Kegelloxodromen* und die *Böschungslinien auf Drehflächen 2. Grades* mit lotrechter Achse.

[4] Vgl. den Bericht über den Vortrag des Verfassers „Über einen Zusammenhang der sphärischen Bündelloxodromen mit den geodätischen Linien auf Drehflächen 2. Grades". Nachr. Österr. Math. Ges., Nr. 6 (1949). Eine ausführliche Darstellung wird der demnächst erscheinende Aufsatz „über die Nyströmsche Strahlkongruenz und die geodätischen Linien der Flächen 2. Grades" (Soc. Sci. Fennica) enthalten.

Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ableiten. Aus verschiedenen Gründen erscheint jedoch eine gesonderte Behandlung dieser Grenzformen zweckmäßiger und soll binnen kurzem folgen. Die Frage nach Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Zylinder sind, wurde a. a. O.[1] bereits in negativem Sinne beantwortet. — Kombinierte Fragestellungen, wie etwa nach Raumkurven, die Pseudogeodätische eines Kegels und Loxodromen eines anderen sind, sind noch offen und könnten möglicherweise gleichfalls eine Untersuchung lohnen.

II. Perspektiv-kollineare Loxodromenpaare.

Sei k eine *bikonische Pseudogeodätische* — deren Existenz wir vorläufig vorwegnehmen — mit den Schmiegebenenneigungen γ_1 und γ_2. Schlagen wir um die Kegelscheitel O_1 und O_2 die Einheitskugeln Ω_1 und Ω_2 und suchen wir bezüglich derselben die Pole S_1 und S_2 der Schmiegebenen σ von k auf, so durchlaufen diese Punkte gemäß Satz 1 je eine *Loxodrome* l_1 und l_2 der Strahlbündel O_1 und O_2 mit den konstanten Schnittwinkeln γ_1, bzw. γ_2.

Denken wir uns den gesamten Ebenenraum $\Sigma(\sigma)$ einmal durch die Polarität $\mathfrak{P}_1$ von Ω_1 und ein anderesmal durch die Polarität $\mathfrak{P}_2$ von Ω_2 transformiert, so erhalten wir zwei kollineare Punkträume $\Sigma_1(S_1)$ und $\Sigma_2(S_2)$. In dieser *Kollineation* $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1$ entsprechen einander auch die beiden Loxodromen l_1 und l_2. Da die Strahlen O_1S_1 und O_2S_2 beide zu σ normal sind, sind sie untereinander parallel und können durch die Parallelverschiebung $\mathfrak{S} = O_2 \rightarrow O_1$ zur Deckung gebracht werden (Abb. 1). Denken wir uns wiederum das ganze System $\Sigma_2(S_2)$ um diesen Betrag $O_1O_2 = h$ verschoben, dann hängt die Neulage $\Sigma_2'(S_2')$ mit dem ersten System $\Sigma_1(S_1)$ durch eine *perspektive Kollineation* $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1$ zusammen, weil die Paare entsprechender Punkte S_1, S_2' durch Strahlen des Bündels $O_1 = O_2'$ gekoppelt sind. Die Kollineationsebene wird von der zu O_1O_2 normalen Durchmesserebene α_1 von Ω_1 dargestellt, denn in dieser fallen tatsächlich die von den zu O_1O_2 parallelen Ebenen σ herrührenden Punktepaare S_1, S_2' zusammen.

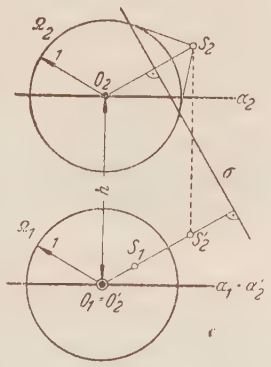

Abb. 1.

Die Frage nach der Existenz der Kurven k ist damit zurückgeführt auf die Frage nach Paaren l_1, l_2' von Loxodromen des Bündels O_1, die

einander in einer bestimmten Kollineation $\mathfrak{K}$ mit dem Zentrum O_1 entsprechen.

Machen wir O_1 zum Ursprung eines räumlichen Normalkoordinatensystems x, y, z, in welchem dem Punkt O_2 die Koordinaten $(0, 0, h)$ zukommen, so werden die *Polaritäten* $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ beschrieben durch

$$x_1\,x + y_1\,y + z_1\,z = 1 \text{ und } x_2\,x + y_2\,y + (z_2 - h)\,(z - h) = 1. \qquad (1)$$

Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen der Kollineation $\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_1$, aus welchen nach Hinzunahme der Schiebung $\mathfrak{S}$ $(x_2' = x_2,\ y_2' = y_2,\ z_2' = z_2 - h)$ die Darstellung der *Zentralkollineation* $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_1$ fließt:

$$x_2' = \frac{x_1}{1 - hz_1},\quad y_2' = \frac{y_1}{1 - hz_1},\quad z_2' = \frac{z_1}{1 - hz_1}. \qquad (2)$$

Wenden wir uns nunmehr wieder dem *Loxodromenpaar* l_1, l_2' zu. Durch Annahme eines Kurvenpunktes $S_1\,(x_1, y_1, z_1)$ ist sein zugeordneter Punkt $S_2'\,(x_2', y_2', z_2')$ mitbestimmt. Die zugehörigen Tangenten t_1 und t_2' sind auf Grund der bekannten Loxodromenwinkel γ_1 und γ_2 an zwei Drehkegel mit der gemeinsamen Achse $O_1 S_1 = O_1 S_2'$ gebunden und müssen einander überdies als entsprechende Geraden auf der Kollineationsebene α_1 treffen (Abb. 2). Unter Berücksichtigung der Vorzeichen von γ_1 und γ_2 ergeben sich damit für t_1 nur zwei mögliche Annahmen, die folgendermaßen konstruiert werden können: Die genannten Drehkegel haben einen Parallelkreis gemein, dessen Mittelpunkt M die Strecke $S_1 S_2'$ im Verhältnis

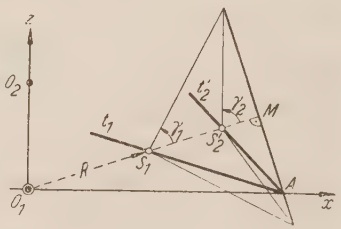

Abb. 2.

$$S_1 M : S_2' M = \cot\gamma_1 : \cot\gamma_2 = m : n \text{ (mit } m - n = 1) \qquad (3)$$

teilt; der Kreis schneidet die Ebene α_1 in zwei Punkten A, durch welche die beiden brauchbaren Lagen von t_1 (und t_2') gehen.

Jeder Raumpunkt S_1 bestimmt demnach mit dem zugehörigen Tangentenpaar t_1 zwei Linienelemente. Die in der so erklärten dreifach ausgedehnten Elementmannigfaltigkeit enthaltenen ∞^2 Elementvereine stellen dann die zu den Angabestücken O_1, O_2, γ_1, γ_2 gehörigen Bündelloxodromen l_1 dar, die über die Kugelpolarität $\mathfrak{P}_1$ die gesuchten bikonischen Pseudogeodätischen liefern.

Auf Grund der drehsymmetrischen Anordnung bezüglich z lassen sich unsere ∞^3 Linienelemente $(S_1 t_1)$ zu je ∞^2 auf ∞^1 Drehflächen Φ_1 verteilen, deren Bestimmung das erste Ziel sein muß. Beschränken wir uns hierbei auf die Betrachtung des Meridians in der xz-Ebene, so finden wir über den Kreismittelpunkt $M\,(mx_2' - nx_1,\ 0,\ mz_2' - nz_1)$ als Gleichung der Kreisebene

$$xx_1 + zz_1 = \frac{m\,(x_1^2+z_1^2)}{1-hz_1} - n\,(x_1^2 + z_1^2). \tag{4}$$

Der Schnitt mit der Kollineationsebene $\alpha_1\,(z = 0)$ liefert dann die Abszisse x_0 von A, und damit ergibt sich schließlich die Differentialgleichung der Meridiankurve

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x - x_0} = \frac{x\,(hz-1)}{z + h\,(mx^2+nz^2)} \tag{5}$$

in welcher der Index 1 fortgelassen wurde.

Die Integration dieser Gleichung gelingt nach Einführung des *Radiusvektors* R mittels $R^2 = x^2 + z^2$, weil sie dann die einfache Gestalt mit getrennten Variablen

$$\frac{dR}{R} = \frac{m\,dz}{z-(1/h)} \tag{6}$$

annimmt. Die Lösung lautet

$$R = C\,.\,(z - \frac{1}{h})^m. \tag{7}$$

Es bedeutet keine Einschränkung, erleichtert jedoch die Schreibweise, wenn wir im folgenden stets $h = 1$ setzen. Die Gleichung der Drehflächen Φ_1 lautet dann

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2\,(z-1)^{2m} \tag{8}$$

$$\text{mit } m = \frac{\cot\gamma_1}{\cot\gamma_1 - \cot\gamma_2} = \frac{\cos\gamma_1 \sin\gamma_2}{\sin(\gamma_2 - \gamma_1)}.$$

Hierin sind für C unter Umständen auch imaginäre Werte zugelassen[5].

---

[5] Die zu Φ_1 kollinearen Trägerflächen Φ_2' der Loxodromen l_2' sind natürlich von analoger Bauart. Ihre Gleichung läßt sich aus (8) mittels der Transformation (2) ableiten; statt $2m$ erscheint dann der Exponent $-2n$.

Das Aussehen solcher Flächen wird durch Abb. 3 für den Fall $m = -1/2$ illustriert. Abschnitt V geht auch noch auf andere besondere Annahmen ein.

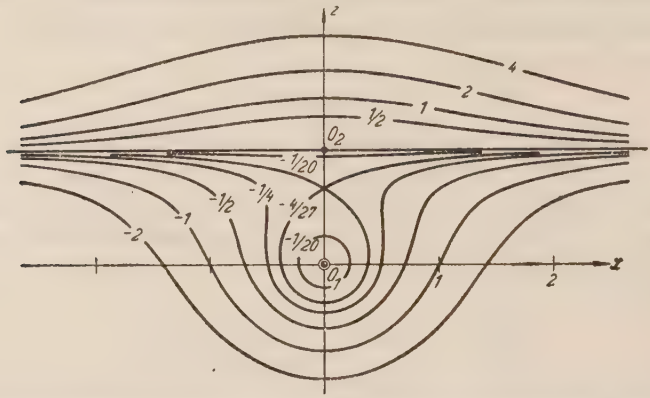

Abb. 3. Büschel von kubischen Drehflächen Φ_1 für die Annahme $m = -1/2$, dargestellt durch $(x^2 + y^2 + z^2)(z - 1) = const.$ Die Bezifferung erfolgte nach dem Wert der Konstanten.

Der nächste Schritt besteht nun in der Bestimmung der Loxodromen l_1, was darauf hinauskommt, Isogonaltrajektorien des Strahlbündels O_1 zu finden, die auf einer Drehfläche Φ_1 verlaufen.

Vollziehen wir mittels $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ den Übergang zu Zylinderkoordinaten r, φ, z, so gelten für das Bogenelement ds der gesuchten Bündelloxodrome mit dem vorgeschriebenen Schnittwinkel γ_1 die Beziehungen

$$ds^2 = (r\,d\varphi)^2 + dr^2 + dz^2, \quad ds = dR/\cos\gamma_1. \tag{9}$$

Drücken wir hierin r und R vermöge

$$r^2 + z^2 = R^2 = C^2(z-1)^{2m} \tag{10}$$

durch die als Parameter aufgefaßte Veränderliche z aus, so erfordert die Berechnung von φ nur eine einfache Quadratur. Unter Verzicht auf die etwas umständliche Zwischenrechnung notieren wir gleich das Ergebnis, in welchem wieder stellenweise n für $m-1$ steht:

$$r = \sqrt{C^2(z-1)^{2m} - z^2} \tag{11}$$

$$\varphi = \pm C \int \frac{\sqrt{C^2 m^2 \operatorname{tg}^2\gamma_1 (z-1)^{2m} - (m^2\operatorname{tg}^2\gamma_1 + n^2) z^2 - 2nz - 1}}{C^2(z-1)^{2m} - z^2} (z-1)^n\,dz$$

Eine elementare Auswertung des Integrals ist nur für $m = 0$ oder 1 möglich; elliptische Integrale treten in den Fällen $m = -1$, $-1/2$, $1/2$, $3/2$ und 2 auf (vgl. hierzu Abschnitt V).

Beachten wir im Hinblick auf (3), daß durch die Angabe der Zahl m der Betrag des Winkels γ_1 keineswegs festgelegt ist, so daß wir diesen — wenigstens innerhalb gewisser Grenzen — noch wählen können, so erkennen wir, daß durch (11) sämtliche auf der Drehfläche Φ_1 verlaufenden Loxodromen des Ursprungsbündels dargestellt werden. Es gilt mithin

Satz 2. *Sämtliche* ∞^2 *auf einer Drehfläche* $r^2 = C^2(z-1)^{2m} - z^2$ *verlaufenden Loxodromen des Ursprungsbündels werden durch die Gleichungen* (11) *beschrieben und haben die merkwürdige Eigenschaft, durch eine bestimmte Zentralkollineation in andere Loxodromen desselben Bündels verwandelt zu werden. Die Kollineation muß nur den Ursprung* $O_1(r = z = 0)$ *zum Zentrum und die Ebene* $z = 1$ *zur Verschwindungsebene haben. Zusammengehörige Schnittwinkel* γ_1 *und* γ_2 *hängen durch die Beziehung* $\cot\gamma_1 : \cot\gamma_2 = m : (m-1)$ *zusammen.*

III. Rotationskongruenz der Loxodromentangenten.

Die Annahme der beiden Winkel γ_1 und γ_2 hat uns im vorigen Abschnitt auf ein durch Gleichung (8) dargestelltes *Büschel von Drehflächen* geführt, welche die ∞^2 Loxodromen l_1 tragen. Greifen wir durch Verfügung über die Konstante C^2 eine bestimmte dieser Drehflächen heraus und betrachten wir die auf dieser Fläche Φ_1 befindliche *Drehschar von* ∞^1 *Loxodromen* l_1, so erfüllen die ∞^2 Loxodromentangenten t_1 eine gewisse Rotationskongruenz $\mathfrak{L}_1$, für welche Φ_1 den einen Mantel der *Brennfläche* abgibt. Auch der zweite Mantel wird natürlich eine Drehfläche sein, die jetzt bestimmt werden soll.

Wir ermitteln zunächst die Gleichung jenes *Drehhyperboloides* Λ, das sich durch Zusammenfassung aller Loxodromentangenten längs eines Parallelkreises (r_1, z_1) von Φ_1 ergibt. Zu diesem Zweck ersetzen wir vorerst Φ_1 durch die längs des Parallelkreises berührende *Kugel* K. Da deren Mittelpunkt auf der Achse um den Betrag $r_1 \dot{r}_1$ über dem Berührungskreis liegt, können wir ihre Gleichung unmittelbar durch

$$x^2 + y^2 + [z - (z_1 + r_1 \dot{r}_1)]^2 = r_1^2 + (r_1 \dot{r}_1)^2$$

ansetzen; drücken wir hierin r_1^2 vermöge (10) durch R_1 und z_1 aus, so nimmt die Gleichung die Gestalt

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\,R_1\,\dot{R}_1\,(z - z_1) - R_1^2 = 0 \qquad (12)$$

an, wobei $R_1 = C\,(z_1 - 1)^m$ ist und der Punkt die Ableitung nach z_1 andeutet. — Das berührende Hyperboloid Λ läßt sich dann sicherlich darstellen durch

$$\Lambda \equiv K - \lambda\,(z - z_1)^2 = 0,$$

wobei der Faktor λ so zu bestimmen ist, daß der durch die Fortschreitungsrichtung $dx_1 : dy_1 : dz_1$ der Loxodrome definierte Fernpunkt auch der Fläche angehört; es muß also gelten

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \lambda\,dz_1^2.$$

Nun stellt die linke Seite aber das Quadrat des Bogenelementes $ds_1 = dR_1 \sec\gamma_1$ dar, woraus $\lambda = \dot{R}_1^2 \sec^2\gamma_1$ folgt. Damit ergibt sich die gewünschte Gleichung des *Hyperboloides* schließlich mit

$$\Lambda \equiv x^2 + y^2 + z^2 - C^2\,(z_1 - 1)^{2m-2}\,[m^2 \sec^2\gamma_1\,(z - z_1)^2 + \\ + 2\,m\,(z_1 - 1)\,(z - z_1) + (z_1 - 1)^2] = 0. \qquad (13)$$

Die beiden Brennflächenmäntel unserer Linienkongruenz $\mathfrak{L}_1$ sind nun identisch mit dem Hüllgebilde der Hyperboloide Λ für veränderliches z_1. Zur Berechnung ist die Gleichung (13) nach dem Parameter z_1 partiell zu differenzieren; dies führt nach Kürzung durch $(z_1 - 1)^{2m-3}$ und Abspaltung des Faktors $z - z_1$ — wodurch die 1. Brennfläche Φ_1 ausgeschieden wird — auf die Bedingung

$$z - z_1 = \frac{m - (2m - 1)\cos^2\gamma_1}{m\,(m - 1)}\,(z_1 - 1), \qquad (14)$$

die die 2. Brennfläche kennzeichnet. Diese Beziehung läßt sich mit Benützung von (3) auf die symmetrische Gestalt

$$\frac{z - 1}{z_1 - 1} = \frac{m}{n}\sin^2\gamma_1 + \frac{n}{m}\cos^2\gamma_1 = \frac{\sin\gamma_1\cos\gamma_1}{\sin\gamma_2\cos\gamma_2} \qquad (15)$$

bringen.

Die Gleichung der *2. Brennfläche* Ψ_1 finden wir nun durch Elimination des Parameters z_1 aus (13) und (14). Führen wir zu diesem Zwecke in (13) statt $z - z_1$ zunächst die proportionale Größe $z_1 - 1$ mittels (14) ein, so nimmt die eckige Klammer die Gestalt

$$[\,] = \frac{\mathrm{tg}^2\gamma_1}{n^2}\,(m^2\sin^2\gamma_1 + n^2\cos^2\gamma_1)\,(z_1 - 1)^2 = \frac{\sin^2\gamma_1}{\cos^2\gamma_2}\,(z_1 - 1)^2$$

an; nunmehr läßt sich mittels (15) leicht der Übergang von $z_1 - 1$ zu $z - 1$ vollziehen, was auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = D^2 (z-1)^{2m} \text{ mit } D = \frac{\sin^m \gamma_2 \cos^n \gamma_2}{\sin^n \gamma_1 \cos^m \gamma_1} C \qquad (16)$$

führt. Da die Bauart mit jener der Gleichung (8) von Φ_1 übereinstimmt, ergibt sich die überraschende Feststellung, daß *beide Brennflächen der Tangentenkongruenz* $\mathfrak{L}_1$ *von gleicher Art* sind und demselben Büschel (8) angehören.

Die Gleichberechtigung der beiden Flächen Φ_1 und Ψ_1 geht jedoch auf Grund der symmetrischen Bauart der Formeln (15) und (16) noch weiter: Setzen wir nämlich an Stelle der ursprünglichen Winkel γ_1 und γ_2 die Winkel $\delta_1 = 90^0 - \gamma_2$ und $\delta_2 = 90^0 - \gamma_1$, so führen diese zunächst gemäß (3) auf dieselben charakteristischen Exponenten m und n; zeichnen wir hierauf in dem zugehörigen Büschel (8) durch die Konstante D die Fläche Ψ_1 aus und betrachten wir die Tangentenkongruenz der auf ihr verlaufenden Bündelloxodromen mit dem Schnittwinkel δ_1, so erweist sich dieselbe mit der Kongruenz $\mathfrak{L}_1$ als identisch, da zufolge (16) Φ_1 als 2. Brennfläche auftritt und zusammengehörige Parallelkreise einander wieder durch (15) zugeordnet sind.

Sind S_1 und T_1 die Berührungspunkte eines Kongruenzstrahls t_1 mit Φ_1 und Ψ_1 (also die beiden „Brennpunkte"), so erscheinen die von S_1, bzw. T_1 begrenzten Halbstrahlen zufolge der Loxodromeneigenschaft aus dem Ursprung O_1 unter den Gesichtswinkeln γ_1, bzw. δ_1. *Die Brennstrecke* $S_1 T_1$ *erscheint daher unter dem konstanten Gesichtswinkel* $\omega = \delta_1 - \gamma_1 = 90^0 - (\gamma_1 + \gamma_2)$!

Zusammenfassend können wir sagen:

Satz 3. *Sämtliche Tangenten der* ∞^1 *Loxodromen, die auf einer Drehfläche* Φ_1 *mit der Gleichung* $x^2 + y^2 + z^2 = C^2 (z-1)^{2m}$ *verlaufen und die Strahlen des Ursprungsbündels unter dem festen Winkel* γ_1 *schneiden, berühren eine zweite gleichartige Fläche* Ψ_1 *mit der Gleichung* $x^2 + y^2 + z^2 = D^2 (z-1)^{2m}$ *und bilden auch auf dieser die Tangenten einer Drehschar von Loxodromen, die das Ursprungsbündel unter einem festen Winkel* δ_1 *durchsetzen. Die Tangentenstrecken werden aus dem Ursprung unter dem konstanten Winkel* $\delta_1 - \gamma_1$ *gesehen. Die Konstanten sind durch die Relationen* $\operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \delta_1 = n/m$ *(mit* $n = m - 1$*) und* $C : D = \sin^n \gamma_1 \cos^m \gamma_1 : \sin^n \delta_1 \cos^m \delta_1$ *verknüpft.*

Da sich die Winkel γ_1 und δ_1 offenbar so bestimmen lassen, daß der Quotient $C : D$ einen vorgegebenen Wert annimmt, so gilt auch umgekehrt:

Satz 4. *Die gemeinsamen Tangenten zweier Drehflächen* $(x^2+y^2+z^2)\,(z-1)^p = const$ *bilden oder enthalten eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Strahlen, deren Berührungsstrecken aus dem Ursprung unter unveränderlichem Gesichtswinkel erscheinen. Aus ihnen lassen sich Torsen aufbauen, deren Gratlinien Loxodromen des vom Ursprung ausgedehnten Strahlbündels sind.*

Lassen wir im besonderen die beiden Flächen Φ_1 und Ψ_1 zusammenrücken, indem wir $\gamma_1 = \delta_1$ machen, so werden aus den gemeinsamen Tangenten die *Haupttangenten* der Fläche Φ_1 und wir erhalten eine Aussage über deren Asymptotenlinien[6]:

Satz 5. *Die Asymptotenlinien (Haupttangentenkurven) der Drehflächen* $x^2+y^2+z^2 = C^2\,(z-1)^{2m}$ *sind Loxodromen des Ursprungsbündels, dessen Strahlen sie unter dem festen Winkel* $\gamma_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{n/m}$ *durchsetzen.*

Dieser Satz gestattet übrigens einen gewissen Rückschluß auf die Gestalt der Drehflächen im Falle $0 < m < 1$: In diesem Fall wird der Winkel γ_1 imaginär, die Asymptotenlinien können daher nicht reell sein und die Flächen — soweit sie reell sind — können nur *elliptische Punkte* haben. Da der reelle Zug ganz im Endlichen verläuft, und singularitätenfrei ist, hat er die Gestalt eines geschlossenen *Ovals*.

IV. Die bikonischen Pseudogeodätischen.

Die Lösung des eingangs aufgeworfenen Problems ergibt sich nun gemäß Abschnitt II unmittelbar durch Ausübung der Polarität $\mathfrak{P}_1$ an der *Kugel* $\Omega_1\,(x^2+y^2+z^2 = 1)$. Hierdurch werden ja die durch (11) beschriebenen *Kegelloxodromen* l_1 in die Tangentenflächen der gesuchten *pseudogeodätischen Linien* k zweier Kegel transformiert; die Punkte von k gehen dabei aus den Schmiegebenen von l_1 hervor.

Von der expliziten Durchführung dieser Transformation soll abgesehen werden, da die analytische Darstellung der Ergebnisse recht unübersichtlich ist.

Aus dem Flächenbüschel (8), das die Trägerflächen Φ_1 der Loxodromen l_1 und die Stützflächen Ψ_1 ihrer Tangenten und Schmiegebenen enthält, wird eine Flächenschar, der nunmehr die Trägerflächen $\overline{\Psi}$ der Pseudogeodätischen k und die Stützflächen $\overline{\Phi}$ der Tangenten und

[6] Daß nicht etwa *Doppeltangenten* entstehen, geht aus Gleichung (15) hervor, deren rechte Seite den Wert 1 annimmt, so daß $z = z_1$ wird, also die Berührungspunkte S_1 und T_1 der ursprünglichen Tangente tatsächlich zusammenrücken.

Schmiegebenen von k angehören. Auch diese Drehflächen werden durch die Gleichung (8) beschrieben, wenn wir die Punktkoordinaten x, y, z durch die Ebenenkoordinaten u, v, w ersetzen, die als Koeffizienten der in der Gestalt $u\,x + v\,y + w\,z = 1$ angeschriebenen Ebenengleichung erklärt sind. Die Gleichung in Punktkoordinaten (Zylinderkoordinaten r, z) läßt sich im allgemeinen nur in Parameterform angeben und lautet dann

$$r = \frac{\pm\sqrt{C^2(\zeta-1)^{2m}-\zeta^2}}{C^2(\zeta-1)^{2m-1}(n\zeta+1)},\quad z = \frac{mC^2(\zeta-1)^{2m-1}-\zeta}{C^2(\zeta-1)^{2m-1}(n\zeta+1)}. \tag{17}$$

Die in Abschnitt III betrachtete Tangentenkongruenz $\mathfrak{L}_1$ mit den Brennflächen Φ_1 und Ψ_1 wird durch die Kugelpolarität $\mathfrak{P}_1$ in eine andere Strahlenkongruenz $\overline{\mathfrak{L}}$ verwandelt, die die Brennflächen $\overline{\Phi}$ und $\overline{\Psi}$ besitzt. Aus der in Satz 3 festgehaltenen Tatsache, daß die Berührungsstrecke $S_1\,T_1$ jedes Strahles aus $\mathfrak{L}_1$ vom Ursprung aus unter dem konstanten Winkel $\omega = 90^0 - (\gamma_1 + \gamma_2)$ erscheint, folgt nunmehr für die Strahlen aus $\overline{\mathfrak{L}}$, daß ihre *Brennebenen einen konstanten Winkel* einschließen, denn diese sind ja mit den Polarebenen von S_1 und T_1 identisch.

Da die 1. Brennebene die Schmiegebene der Kurve k darstellt, die 2. Brennebene hingegen die Trägerfläche $\overline{\Psi}$ von k berührt, so folgt weiter, daß k eine *pseudogeodätische Linie der Drehfläche* (mit der Schmiegebenenneigung ω) ist[7]. Damit ist eine interessante Eigenschaft der bikonischen Pseudogeodätischen aufgedeckt:

Satz 6. *Jede Raumkurve, die pseudogeodätische Linie zweier Kegelflächen ist, ist auch pseudogeodätische Linie einer Drehfläche, deren Achse die beiden Kegelscheitel verbindet. Die Summe der drei Schmiegebenenneigungen γ_1, γ_2 und ω beträgt einen rechten Winkel.*

Die drei Flächen schneiden einander längs der Kurve unter durchwegs konstanten Winkeln.

Dual zu Satz 4 haben wir ferner den

Satz 7. *Die gemeinsamen Tangenten zweier Drehflächen $(u^2+v^2+w^2)(w-1)^p = const$ bilden oder enthalten eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Strahlen, deren Brennebenen (Berührungsebenen) einen festen Winkel einschließen. Die Gratlinien der aus ihnen aufgebauten*

---

[7] Während die Bestimmung der *echten Geodätischen* einer *Drehfläche* nach dem Satz von *Clairaut* auf eine Quadratur hinausläuft, erfordert die Bestimmung der *Pseudogeodätischen* die Auflösung einer Riccatischen Differentialgleichung.

Torsen sind pseudogeodätische Linien auf den Drehflächen und überdies auf je zwei Kegelflächen, die vom Ursprung bzw. vom Punkt $+1$ der z-Achse ausstrahlen.

Da die Haupttangenten polarer Flächen einander entsprechen, so folgt aus Satz 5 der

Satz 8. *Die Asymptotenlinien (Haupttangentenkurven) der Drehflächen $u^2+v^2+w^2 = C^2(w-1)^{2m}$ sind Pseudogeodätische ihrer Verbindungskegel mit dem Ursprung und mit dem Punkt $+1$ der z-Achse; dieselben schneiden die Flächen unter den festen Winkeln $\gamma_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{n/m}$, bzw. $\gamma_2 = 90^0 - \gamma_1$.*

Auch hier ist ein entsprechender Rückschluß auf die Gestalt der Drehflächen wie im Anschluß an Satz 5 möglich.

V. Sonderfälle.

Vor dem Eingehen auf besondere Annahmen soll noch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß rationale Werte von m (und n) auf algebraische Trägerflächen Φ und $\bar{\Phi}$ führen, wie aus den Gleichungen (8), bzw. (17) zu ersehen ist. Die zugehörigen Loxodromen l, bzw. Pseudogeodätischen k bleiben hiervon jedoch unberührt und sind im allgemeinen transzendent.

Zur Bestimmung von *Ordnung* und *Klasse* der Drehflächen schreiben wir den rationalen Quotienten $m:n$ als gekürzten Bruch $\mu:\nu$ an. Eine nähere Untersuchung der Gleichungen (8) und (17) führt dann zu dem folgenden Ergebnis:

Satz 9. *Im algebraischen Falle ($m:n = \mu:\nu$ rational; μ, ν ganz und teilerfremd) haben die Drehflächen Φ, welche die Loxodromen tragen, die Ordnung $M = \max(|\mu|, |\mu-\nu|, |\nu|)$ und die Klasse $N = 2\max(|\mu|, |\nu|)$, falls die beiden Zahlen μ und ν ungerade sind; andernfalls sind die Werte zu verdoppeln.*

Für die Trägerdrehflächen $\bar{\Phi}$ der Pseudogeodätischen vertauschen die Zahlen M und N ihre Bedeutung.

Zu reziproken Werten des Quotienten $m:n$, oder, was dasselbe ist, zu Werten von m, die einander auf $+1$ ergänzen, gehören (in Übereinstimmung mit Fußnote 5) kollineare Drehflächen Φ, hingegen gleichartige Flächen $\bar{\Phi}$. Die folgende Tabelle der Fälle $M \leqq 6$ faßt zusammengehörige Paare jeweils in einer Zeile zusammen:

m	n	M	N
$0 \;;\; 1$	$-1 \;;\; 0$	2	2
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	2
$-\frac{1}{2} \;;\; \frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} \;;\; \frac{1}{2}$	3	6
$\frac{1}{4} \;;\; \frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4} \;;\; -\frac{1}{4}$	4	6
$-1 \;;\; 2$	$-2 \;;\; 1$	4	8
$\frac{1}{3} \;;\; \frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} \;;\; -\frac{1}{3}$	6	8
$-2 \;;\; 3$	$-3 \;;\; 2$	6	12

Zu einzelnen Fällen dieser Zusammenstellung sollen nun noch einige Bemerkungen gemacht werden.

1) $m = 0$: *Pseudogeodätische Linien des Drehkegels.*

Über die Bündelloxodromen l_1 läßt sich zunächst keine unmittelbare Aussage machen, da ihr Schnittwinkel γ_1 zufolge (3) ein rechter ist und ihre Trägerflächen Φ_1 gemäß (8) *Kugeln* um den Ursprung O_1 sind, so daß sie vorläufig unbestimmt bleiben. Diese Unbestimmtheit ist jedoch bei den perspektiv-kollinearen Loxodromen l_2' nicht mehr vorhanden; dieselben verlaufen mit beliebig vorgebbarem Schnittwinkel γ_2 auf *Drehflächen 2. Grades* Φ_2':

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2 (z + 1)^2, \tag{18}$$

die $O_2' = O_1$ als Brennpunkt und $z = -1$ als gemeinsame Leitebene besitzen. Derartige Loxodromen sind aber wohlbekannt: Es handelt sich um die *Böschungslinien* der Quadriken Φ_2', deren Achse lotrecht zu denken ist[8]. Diesen Sachverhalt können wir sofort bestätigen, wenn wir die Stützfläche Ψ_2' der Loxodromentangentenkongruenz von Φ_2' aufsuchen: Bei sinngemäßer Anwendung von Satz 3 ($m = 1$, $\delta_1 = 0$) finden wir $D = \infty$; Ψ_2' ist also ausgeartet, und zwar in einen gewissen *Fernkreis* f_2, der von allen Loxodromentangenten getroffen wird. In der Tat besitzen alle Drehhyperboloide Λ (13) dieselbe Fernkurve, dargestellt durch den Richtkegel

$$x^2 + y^2 = (C^2 \sec^2 \gamma_2 - 1)\, z^2. \tag{19}$$

Der Böschungswinkel β (Neigung gegen die xy-Ebene) ergibt sich, indem wir den Klammerausdruck mit $\cot^2 \beta$ identifizieren, mittels

$$\sin \beta = \frac{\cos \gamma_2}{C}. \tag{20}$$

[8] *A. Enneper*, Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Math. Ann. 19 (1882).

Nachträglich lassen sich nun auch die Loxodromen l_1 kennzeichnen: Ihre Tangenten treffen den zu f_2 kollinearen, in der Verschwindungsebene $z = 1$ liegenden, *endlichen Kreis* f_1, der ebenfalls durch (19) beschrieben wird; die Berührungskreise der aus den Punkten von f_1 an die Trägerkugel Φ_1 legbaren Tangentenkegel bilden eine Drehschar, die von den Kurven l_1 orthogonal durchsetzt wird; dieselben sind also *sphärische Kreistraktrizen*[9].

Die zugehörigen, mit Hilfe der Kugelpolarität $\mathfrak{P}_1$ aus l_1 (oder mittels $\mathfrak{P}_2$ aus l_2) abgeleiteten Raumkurven sind einerseits wegen $\gamma_1 = 90^0$ *echte Geodätische* auf ihrem Verbindungskegel mit dem Ursprung O_1, anderseits *Pseudogeodätische* mit der Schmiegebenenneigung γ_2 auf dem zu f_1 polaren, von O_2 ausstrahlenden *Drehkegel* mit der Öffnung 2β.

Diese *Drehkegelpseudogeodätischen* wurden a. a. O.[2] eingehend untersucht, wobei zahlreiche interessante Eigenschaften und Beziehungen zu Tage traten. Erwähnt sei nur, daß bei Verbiegung eines Drehkegels zu einem anderen seine pseudogeodätischen Linien ihre charakteristische Eigenschaft konstanter Schmiegebenenneigung behalten, ferner daß sie sich als *Kettenlinien* in einem *Newton*schen Schwerefeld deuten lassen: Sie sind mit den Gleichgewichtsfiguren homogener Ketten identisch, die der Oberfläche eines vom Gravitationszentrum ausstrahlenden Drehkegels reibungslos anliegen.

2) $m = 1/2$: *Geodätische Linien auf Drehflächen 2. Grades.*

Die Trägerflächen Φ_1 der Bündelloxodromen l_1 haben die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2 (z - 1), \tag{21}$$

sind also *Kugeln* eines hyperbolischen Büschels, dessen Nullkugelzentren im Ursprung O_1 und im Punkt (0,0,2) liegen. Diesmal ist auch das Büschel der kollinearen Flächen Φ_2 von gleicher Art.

Die *sphärischen Bündelloxodromen* können als hinreichend bekannt angesehen werden. Sie wurden zum erstenmal von *G. Pirondini* betrachtet[10], der erkannt hatte, daß sie zu den polykonischen Loxodromen gehören; sie durchsetzen nämlich neben dem definierenden Strahlbündel auch noch jenes unter konstantem Winkel, dessen Scheitel zu dem des ersten invers liegt[3]. Zufolge Satz 4 können sie als die Gratlinien jener (nichtkonischen) Torsen erklärt werden, die sich aus den gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln aufbauen lassen; von diesem Gesichtspunkt aus wurden sie vom Verfasser betrachtet[11].

Durch Ausübung der Polarität an der Einheitskugel um O_1 geht das Kugelbüschel Φ_1, das den von O_1 ausstrahlenden Minimalkegel enthält, in eine *Schar von Drehflächen 2. Klasse* $\overline{\Phi}$ über, unter denen sich der absolute Kegelschnitt befindet, die also *konfokal* sind; die gemeinsamen Brennpunkte sind O_1 und O_2 (0,0,1). Die zu den sphärischen Bündelloxodromen polaren bikonischen Pseudogeodätischen haben gemäß (3) in bezug auf die Verbindungskegel mit den Brennpunkten entgegengesetzt gleiche Schmiegebenenneigungen γ_1 und $\gamma_2 = -\gamma_1$

---

[9] *W. Wunderlich*, Über die Schleppkurven des Kreises. Sitz.-Ber. Ak. Wiss., Wien 156 (1948).

[10] *G. Pirondini*, Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. Crelles J. 118 (1897).

[11] *W. Wunderlich*, Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren. Soc. Sci. Fennica, Comm. phys. math. 14 (1949). Vgl. auch den Vortragsbericht a. a. O.[4]

und sind auf Grund von Satz 6 wegen $\omega = 90^0 - (\gamma_1 + \gamma_2) = 90^0$ (und in Übereinstimmung mit einem bekannten Satz von *Chasles*) *echte Geodätische der Rotationsquadriken* $\overline{\Phi}$.

Satz 10. *Die geodätischen Linien einer Drehfläche 2. Grades sind Pseudogeodätische ihrer Verbindungskegel mit den Flächenbrennpunkten.*

Dieser Sachverhalt, auf den bereits a. a. O.[4] hingewiesen wurde, hatte ursprünglich den Anstoß zu der vorliegenden Untersuchung gegeben. Eine andere Verallgemeinerung dieser Eigenschaft (für die Geodätischen der allgemeinen Flächen 2. Grades) wird die in Fußnote 4 angekündigte Abhandlung enthalten.

3) $m = -1/2$.

Das Büschel der hierzu gehörigen *kubischen Drehflächen* Φ_1 ist in Abb. 3. dargestellt. Für die Meridiankurven scheint es trotz der einfachen Definitionsgleichung $(x^2 + z^2)(z - 1) = const$ keinen eigenen Namen zu geben. Unter ihnen ist die rationale hervorzuheben, die sich für $C^2 = -4/27$ ergibt und die mit der *Trisektrix von Maclaurin* identisch ist; durch die Kollineation $\mathfrak{K}$ wird sie in die *Tschirnhaus-Kubik* verwandelt[12]. Die zugehörige polare Drehfläche $\overline{\Phi}$ entsteht durch Rotation der *Kardioide* um ihre Spitzentangente.

Aussagen der folgenden Art, die sich durch Spezialisierung der Sätze 5 und 8 ergeben, erscheinen außerhalb dieses Zusammenhanges recht auffällig:

Satz 11. *Die Asymptotenlinien der kubischen Drehflächen, die durch Rotation einer Trisektrix von Maclaurin, bzw. einer Tschirnhaus-Kubik um die Symmetrieachse erzeugt werden, durchsetzen das vom außerordentlichen, bzw. ordentlichen Brennpunkt der Fläche ausgehende Strahlbündel unter konstanten Winkeln von* 60^0, *bzw.* 30^0.

Satz 12. *Die Asymptotenlinien der Drehfläche 4. Ordnung, die durch Rotation einer Kardioide um ihre Spitzentangente entsteht, sind pseudogeodätische Linien ihrer Verbindungskegel mit dem Mittelpunkt oder der Spitze; die festen Schnittwinkel dieser Kegel mit der Fläche betragen* 60^0, *bzw.* 30^0.

4) $m = 1/4$.

Die Drehflächen Φ_1, dargestellt durch

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = C^4 (z - 1), \tag{22}$$

sind von 4. Ordnung und besitzen längs des absoluten Kugelkreises eine Rückkehrkante. Die Flächen gehören zu den *Zykliden*, denn sie lassen sich auch durch Rotation von (allerdings imaginären) Kreisen erzeugen, und zwar auf sechs Arten: Jede Minimalebene, die die Fläche noch in einem endlichen Punkt D berührt — also einen der drei ordentlichen Brennpunkte der Fläche enthält — liefert eine Schnittlinie 4. Ordnung, die einen Doppelpunkt in D und eine Selbstoskulation im Berührungspunkt mit der Rückkehrkante aufweist, also in zwei Kegelschnitte zerfällt, die als „parabolische Kreise" anzusehen sind.

---

[12] S. etwa *H. Wieleitner*, Spezielle ebene Kurven (Sammlg. Schubert 56, Leipzig 1908).

Die *Trisektrix von Maclaurin* ist eine Fußpunktskurve der Parabel und gehört u. a. zu den Ährenkurven und den Araneiden.

Die *Tschirnhaus-Kubik* besitzt eine Parabel als Fußpunktskurve, gehört u. a. zu den Sinusspiralen und tritt als Brennlinie der Parabel bei Parallelbeleuchtung auf.

Der Meridian der Drehfläche ist eine Quartik mit absoluten Spitzen, also ein *Cartesisches Oval*, allerdings ein spezielles, dadurch ausgezeichnet, daß die Spitzentangenten die Berührungspunkte der (einzigen und natürlich isolierten) Doppeltangente enthalten.

In diesem Zusammenhange ist vielleicht der Hinweis nicht uninteressant, daß die in der Einleitung erwähnten „polykonischen Loxodromen"[3] auch auf Drehflächen verlaufen, die durch Drehung eines Cartesischen Ovals um seine Achse entstehen; sie durchsetzen jeweils die drei Strahlbündel, die von den drei ordentlichen Brennpunkten ausgehen, unter festen Winkeln. Im Falle einer unserer Flächen Φ_1 tritt zu diesem ausgezeichneten Loxodromensystem noch das hier zur Untersuchung stehende hinzu, das zu dem vom außerordentlichen Brennpunkt ausstrahlenden Bündel gehört.

5) $m = -1$.

Die hier auftretenden Drehflächen Φ_1 sind ebenfalls von 4. Ordnung. Ihre Meridiane sind definiert durch die Bedingung $(x^2 + z^2)\,(z-1)^2 = const$ und sind die Örter jener Punkte, deren Abstände von einem festen Punkt O_1 und von einer festen Geraden $z = 1$ ein konstantes Produkt haben; diese Kurven wurden von *G. Huber Konchalen* genannt und ausführlich untersucht[13]. Hervorzuheben ist wieder die rationale unter ihnen, die sich für $C^2 = 1/16$ ergibt und eine *Newtonsche Kettenlinie* ist.

[13] *G. Huber*, Die Conchalen, ihre orthogonalen Trajektorien und die Cissoiden 4. Ordnung. Mh. Math. Phys. 6 (1895). Vgl. auch *G. Loria*, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (Leipzig 1902), Bd. I.

Über die Eliminationstheorie.

Von
W. Gröbner, Innsbruck.

(Eingelangt am 10. August 1949.)

1. Die Aufgabe, zu deren Lösung die Eliminationstheorie erdacht wurde, ist die, sämtliche Lösungen eines Systems von algebraischen Gleichungen

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (1)$$

zu ermitteln. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind irgendwelche vorgegebene Polynome in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus einem Zahlkörper K. Die Aufgabe ist offenbar um so einfacher, je weniger Variable auftreten; bei einer einzigen Variablen dürfen wir ihre Lösung als vollkommen bekannt voraussetzen. Daher ist es der Grundgedanke der Eliminationstheorie, das Gleichungssystem (1) schrittweise auf äquivalente Gleichungssysteme mit weniger Variablen zurückzuführen; also zunächst etwa die Variable x_n zu „eliminieren", d. h. aus (1) ein Gleichungssystem

$$g_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0, g_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0, \ldots, g_t(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 \quad (2)$$

abzuleiten, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:

(A) Jede Lösung $x_i = \xi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ von (1) ist auch eine Lösung von (2); dabei bedeuten die ξ Zahlen aus K oder einer Erweiterung von K;

(B) Jede Lösung $x_i = \xi_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ von (2) läßt sich auf mindestens eine Art durch geeignete Bestimmung von $x_n = \xi_n$ zu einer Lösung von (1) ergänzen.

Die bekannteste Methode[1], ein derartiges Gleichungssystem (2) aus (1) abzuleiten, ist die *Kroneckers*che Eliminationsmethode; sie ist jedenfalls die bequemste und durchsichtigste, aber keineswegs die

---

[1] Enzyklopädie d. math. Wiss., 2. Aufl., 1939, Bd. I 1, Heft 5, *W. Krull*, Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie, S. 12ff. — *B. L. v. d. Waerden*, Moderne Algebra, 2. Aufl., 1940, Bd. 2, S. 1ff.

einzig mögliche[2], und kann dies auch nicht sein, denn durch die Eigenschaften (A) und (B) ist das System (2) noch lange nicht eindeutig bestimmt. Das ist offenbar ein Mangel in den grundsätzlichen Überlegungen, welcher der Eliminationstheorie in ihrer gewöhnlichen Gestalt anhaftet und der sich auch irgendwo einmal bemerkbar machen muß. Es geht nämlich solange gut, als man nur nach den Lösungen überhaupt fragt, feinere Unterscheidungen jedoch, welche die Vielfachheit der Lösungen betreffen, außer Acht läßt[3].

2. Die Mittel aber, die Eliminationstheorie frei von diesem Mangel aufzubauen, liefert die Idealtheorie. Die Polynome $f(x)$ des Systems (1) erzeugen ein Ideal

$$\mathfrak{a} = (f_1, f_2, \ldots, f_s) \tag{3}$$

---

[2] Vgl. etwa die *Hentzeltsche Eliminationsmethode* im oben zitierten Artikel von *Krull*, S. 14f.

[3] Das hat sich tatsächlich gezeigt bei der genaueren Diskussion eines von *Vahlen* (Crelles Journal f. Math. **108** (1891)) gegebenen Beispiels für einen bekannten Satz von *Kronecker*, wonach jedes System von algebraischen Gleichungen in n Variablen einem System von höchstens $n + 1$ Gleichungen äquivalent sei (so daß beide Systeme dieselben Lösungen besitzen, vgl. etwa *J. König*, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen, Leipzig 1903, S. 234ff.), oder eine algebraische Mannigfaltigkeit in einem linearen n-dimensionalen Raum immer durch höchstens $n + 1$ Gleichungen dargestellt werden könne (vgl. *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, 2ª ed. Messina 1923, p. 232 s.). Da ein genauer, allgemein anwendbarer Multiplizitätsbegriff damals nicht vorhanden war und auch heute noch umstritten ist, trotzdem der Aufbau der algebraischen Geometrie ohne diesen nicht möglich ist, wurden die damit verquickten Probleme vielfach nur in gefühlsmäßiger Weise behandelt und gelöst, so daß die Resultate einer strengen Kritik nicht standhalten können. Vgl. *O. Perron*, Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker, Math. Ann. **118** (1942), S. 441—448; — Über die Bedingungen, daß eine binäre Form n-ten Grades eine n-te Potenz ist, und über die rationale Kurve n-ter Ordnung im R_n, Math. Ann. **118** (1941/43), S. 305—309; — Studien über den Vielfachheitsbegriff und den Bézoutschen Satz, Math. Zeitschr. **49** (1944), S. 654—680. Ferner *F. Severi*, Über die Darstellung algebraischer Mannigfaltigkeiten als Durchschnitte von Formen, Abh. Math. Sem. Hamburg **15** (1943), S. 97—119; Il concetto di molteplicità delle soluzioni pei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione, Annali mat. pura appl. (IV) **26** (1947), p. 221—270.

Zusatz bei der Korrektur: Diese Diskussionen und mündliche Besprechungen während des Mathematiker-Kongresses in Innsbruck (29. 8. bis 2. 9. 1949) haben klargestellt, daß auf der Seite der modernen Algebra bisher noch kein allgemein anwendbarer Multiplizitätsbegriff existierte (vgl. *v. d. Waerden*, Zbl. f. Math. **25** (1942), S. 211f.: „Nun ist aber die Vielfachheit eines nicht isolierten Schnittpunktes von 3 Flächen meines Wissens noch nie definiert worden"); andererseits muß anerkannt werden, daß in der italienischen Schule der algebraischen Geometrie *Severi* seit langem einen allgemeinen Multiplizitätsbegriff entwickelt hat, dessen genauere Begründung und Definition in

im Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$, dessen Nullstellengebilde oder „zugehörige algebraische Mannigfaltigkeit"[4] zu ermitteln ist. Wir wollen hier den von der Eliminationstheorie vorgezeichneten Weg einschlagen und andere Möglichkeiten, welche die Idealtheorie eröffnet, zunächst unbeachtet lassen. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz folgt auf Grund der Eigenschaft (A), daß die Polynome g des Systems (2), wenn nicht selbst, so doch zu einer gewissen Potenz erhoben, im Ideal $\mathfrak{a}$ enthalten sein müssen: $g_i^{\varrho} \equiv 0\,(\mathfrak{a})$. Für die nach der *Kronecker*schen Methode gewonnenen Polynome g ist bekanntlich $\varrho = 1$.

Es ist daher naheliegend, folgende Definition einzuführen: *Alle Polynome des Ideals* $\mathfrak{a}$, *welche die Variable* x_n *nicht enthalten, bilden ein Ideal* $\mathfrak{b}$ *im Polynomring* $K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, *dessen Basispolynome, gleich null gesetzt, das Gleichungssystem* (2) *liefern. Das Ideal* $\mathfrak{b}$ *kann als Durchschnitt*

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$$

geschrieben werden und heißt das „erste Eliminationsideal"[5]. Durch diese Definition ist jede Willkür in der Auswahl und Bestimmung des Systems (2) ausgeschaltet und es darf mit Recht erwartet werden, daß hier auch die Frage nach der Vielfachheit der einzelnen Lösungen immer in klarer und übersichtlicher Weise beantwortet werden kann. Damit endlich

---

den oben zitierten Arbeiten unternommen wurde. Es ist auch klar, daß alle Diskussionen über den *Kronecker*schen Satz und ähnliche weitergehende Sätze der algebraischen Geometrie ergebnislos verlaufen müssen, solange kein beiderseits anerkannter Multiplizitätsbegriff vorliegt.

Meiner vorliegenden Arbeit liegt der idealtheoretische Multiplizitätsbegriff zugrunde, den ich in meinem Buch „Moderne algebraische Geometrie" (Wien 1949) entwickelt habe; dieser ist sehr einfach und allgemein anwendbar, stimmt aber nicht genau mit dem *Severi*schen Begriff überein, welcher Stetigkeitsbetrachtungen und Grenzübergänge benützt. Der idealtheoretische Begriff dürfte m. E. wegen seiner Einfachheit und Allgemeinheit für den ersten Aufbau der algebraischen Geometrie vorzuziehen sein; dagegen wird die Behandlung der *Severi*schen Äquivalenzsysteme die Notwendigkeit herausstellen, einen „virtuellen" Multiplizitätsbegriff hinzuzunehmen, der mit dem *Severi*schen Multiplizitätsbegriff im wesentlichen übereinstimmt.

[4] Der Begriff „zugehörige algebraische Mannigfaltigkeit" ist hier in dem feineren, die Multiplizität jeweils einschließenden Sinne zu verstehen; vgl. meine „Moderne algebraische Geometrie", Wien 1949, S. 81ff.

[5] Das allgemeinste und umfassendste Resultantensystem (2) würde man erhalten, wenn man auch Exponenten $\varrho > 1$ zuließe; man müßte dann sagen: Alle Polynome des Polynomringes $K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, von denen eine gewisse Potenz im Ideal $\mathfrak{a}$ enthalten ist, bilden das Eliminationsideal $\mathfrak{b}$ und dessen Basis ist das Resultantensystem (2). Damit würden aber, wie leicht einzusehen, alle bestehenden Vielfachheiten unterdrückt werden.

die Eigenschaft (B) erfüllt sei, braucht wie bei der *Kronecker*schen Methode nur vorausgesetzt zu werden, daß die Polynome $f(x)$ genügend allgemein, d. h. in bezug auf die Variable x_n regulär seien[6].

3. Die geometrische Bedeutung der Elimination von x_n ist sehr anschaulich: Die zum Ideal $\mathfrak{b}$ gehörige algebraische Mannigfaltigkeit ist nämlich genau die Mannigfaltigkeit, welche man durch Projektion der algebraischen Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{a}$ auf die Koordinatenhyperebene $x_n = 0$ erhält, wenn das Projektionszentrum im uneigentlichen Punkt der x_n-Achse angenommen wird. Der Mangel der *Kronecker*schen Methode kommt darin zum Ausdruck, daß sie diese Mannigfaltigkeit manchmal mit einer zu großen Multiplizität liefert, während nach der obigen Definition genau die der Theorie und Anschauung entsprechende Multiplizität herauskommt. Das soll noch an den folgenden einfachen Beispielen verdeutlicht werden:

1. Beispiel: $\mathfrak{a} = (x_1^2, x_1 - x_2)$, $\mathfrak{b} = (x_1^2)$; die zu $\mathfrak{a}$ gehörige algebraische Mannigfaltigkeit besteht aus dem Punkt $x_1 = x_2 = 0$ und dem in der Richtung $x_1 - x_2 = 0$ liegenden benachbarten[7] Punkt, also hat die Lösung $x_1 = x_2 = 0$ die Multiplizität 2. Das Eliminationsideal $\mathfrak{b}$ hat die Nullstelle $x_1 = 0$ ebenfalls mit der Multiplizität 2, entsprechend der geometrischen Vorstellung, daß diese beiden benachbarten Punkte auf der x_1-Achse genau die Projektion der beiden zu $\mathfrak{a}$ gehörigen benachbarten Punkte sind. Die *Kronecker*sche Methode würde hier dasselbe Resultat liefern.

2. Beispiel: $\mathfrak{a} = (x_1, x_1 - x_2^2)$, $\mathfrak{b} = (x_1)$; die Nullstelle $x_1 = x_2 = 0$ von $\mathfrak{a}$ hat wieder die Multiplizität 2 und besteht geometrisch aus diesem Punkt und dem auf der x_2-Achse liegenden unmittelbar benachbarten Punkt. Diese beiden Punkte fallen bei der Projektion in den einzigen Punkt $x_1 = 0$ zusammen, der die einfache Nullstelle von $\mathfrak{b}$ ist. Die Multiplizität der entsprechenden Nullstelle des Eliminationsideals ist also hier kleiner geworden; daß aber derjenigen von $\mathfrak{a}$ die Multiplizität 2 zukommt, erkennt man sofort daraus, daß bei der Ergänzung die quadratische Gleichung $x_2^2 = 0$ zu lösen ist, welche die Wurzel $x_2 = 0$ mit der Multiplizität 2 besitzt. Die *Kronecker*sche Methode würde hier die Resultante $x_1^2 = 0$ liefern, was zufällig zum richtigen Ergebnis führen würde, wenn man die noch zu lösende quadratische Gleichung unbeachtet ließe.

---

[6] Vgl. die genaueren Entwicklungen darüber in meinem oben zitierten Buch, S. 39ff.

[7] Über die Bedeutung „benachbart" vgl. mein oben zitiertes Buch, S. 86

3. Beispiel (von *Perron*[8]): $\mathfrak{a} = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$ mit den aufeinanderfolgenden Eliminationsidealen $\mathfrak{b} = (x_1^2, x_2^2)$ und $\mathfrak{c} = (x_1^2)$; das letzte Ideal $\mathfrak{c}$ hat offenbar die Nullstelle $x_1 = 0$ mit der Multiplizität 2, da man aber im Laufe der Ergänzungen die beiden quadratischen Gleichungen $x_2^2 = 0$ und $x_3^2 = 0$ auflösen muß, folgt schließlich für $\mathfrak{a}$ die Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ mit der Multiplizität $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ in Übereinstimmung mit der aus geometrischen Überlegungen oder mit Hilfe des *Bézout*schen Satzes gewonnenen Erwartung. Die *Kronecker*sche Methode führt hier jedoch, wie *Perron* ausführt, sukzessive zu den Resultantensystemen

$$x_1^4 = 0,\ x_1^2 x_2^2 = 0,\ x_2^4 = 0$$

und schließlich zu $x_1^{16} = 0$; daraus würde für das ursprüngliche Gleichungssystem die Multiplizität 16, und wenn man die noch zu lösenden beiden quadratischen Gleichungen mitberücksichtigt, sogar die Multiplizität 64 folgen, was offenbar sinnlos ist. Wie *Perron* zeigt, ändert auch eine vorausgeschickte allgemeine lineare Transformation nichts an diesem Ergebnis.

4. Die Hilfsmittel der modernen Idealtheorie gestatten es, auch noch ganz andere Wege zur Lösung unseres Problems einzuschlagen, welche sowohl für die theoretische Bearbeitung neue Einsichten eröffnen, wie auch für die praktische Durchführung neue Rechnungsmethoden aufschließen können. Ich möchte hier eine solche idealtheoretische Methode im Falle eines nulldimensionalen Ideals $\mathfrak{a}$ ausführlich zeigen, also in dem Falle, wo das Gleichungssystem (1) nur eine endliche Anzahl von Lösungen besitzt. Der allgemeine Fall läßt sich auf diesen immer in bekannter Weise zurückführen.

Wenn $\mathfrak{a}$ nulldimensional ist, so ist der Restklassenring $\mathfrak{o} = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ ein kommutatives hyperkomplexes System (Algebra) über dem Zahlkörper K, d. h. es gibt nur endlich viele Restklassen, die linear unabhängig über K sind[9]. Alles läuft nun zunächst darauf hinaus, dieses hyperkomplexe System, und zwar seine Multiplikationstafel explizit zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke gehen wir so vor: wir denken uns die Potenzprodukte der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in passender, etwa lexikographischer

---

[8] Vgl. die oben zitierte Arbeit von *O. Perron*, Math. Zeitschr. **49** (1944), S. 656ff.

[9] Vgl. mein oben zitiertes Buch, S. 96f.

Weise[10] geordnet; auch die Polynome $f(x)$ seien der besseren Übersicht halber in dieser Anordnung geschrieben. Nun bezeichnen wir die Restklassen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ der Reihe nach mit $u_1, \ldots, u_n$; falls unter den Polynomen $f(x)$ lineare vorkommen, so bewirken diese im Restklassenring eine lineare Abhängigkeit der Restklassen u und wir können dementsprechend eines oder mehrere dieser u durch die übrigen linear ausdrücken und dann weglassen. Die restlichen u erzeugen jedenfalls mit ihren Potenzprodukten den gesamten Restklassenring $\mathfrak{o}$; dabei sind aber noch die durch die Polynome $f(x)$ aufgedrückten Beziehungen zu berücksichtigen. Wir werden also in der gewählten Anordnung die Potenzprodukte der u bilden und diese, soweit sie sich nicht infolge der Polynome $f(x)$ als linear abhängig von den vorausgehenden erweisen, mit fortlaufend numerierten Symbolen u_i bezeichnen.

Da die Multiplikation kommutativ und assoziativ ist, kann jedes Potenzprodukt auf verschiedene Arten in zwei Faktoren zerlegt werden; die Multiplikation muß dann mit Hilfe der bereits gewonnenen Formeln durchgeführt und die Resultate miteinander verglichen werden. Es kann vorkommen, daß sie nicht miteinander übereinstimmen; dann folgt eine lineare Abhängigkeit der bisher eingeführten Größen u, welche dazu benützt werden muß, eine dieser Größen linear durch die übrigen auszudrücken und aus dem Schema der linear unabhängigen Restklassen zu streichen. Diese Korrektur muß dann auch noch in allen Beziehungen, wo die zu streichende Größe auftritt, gleich durchgeführt werden, bevor man zum nächsten Potenzprodukt übergeht.

Da das Ideal $\mathfrak{a}$ nach Voraussetzung nulldimensional ist, können nur endlich viele linear unabhängige Restklassen u auftreten; man kann sicher sein, daß keine neuen linear unabhängigen Restklassen hinzukommen können, sobald einmal für einen gewissen Grad m alle Potenzprodukte sich als linear abhängig von den vorausgehenden erwiesen haben. Man wird daher mit dem Verfahren zu Ende sein, wenn erstens alle Polynome $f(x)$ berücksichtigt sind und zweitens die vollständige Multiplikationstafel der als unabhängig erkannten u gebildet ist. Die kommutative und assoziative Eigenschaft der Multiplikationstafel folgt

---

[10] Ein Potenzprodukt $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ kommt vor dem Potenzprodukt $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}$, falls der Grad $i_1 + i_2 + \ldots + i_n < j_1 + j_2 + \ldots + j_n$ ist, oder bei gleichem Grade, falls $i_1 > j_1$, oder $i_1 = j_1$, $i_2 > j_2$ usw. ist.

dann unmittelbar aus dem angewandten Verfahren, da diese Eigenschaften bei der Bildung der Potenzprodukte der erzeugenden Größen u jeweils überprüft wurde.

Man hat damit ein hyperkomplexes System $K[1, u_1, \ldots, u_m]$ gewonnen, das mit dem Restklassenring $\mathfrak{o}$ isomorph ist, weil alle Polynome $f(x)$ aus dem Ideal $\mathfrak{a}$ und nur diese bei der Abbildung $x_i \to u_i$ in Null übergehen[11].

5. Wir erläutern diese Methode an einem einfachen Beispiel: $\mathfrak{a} = (x_2 + x_1 x_2 + x_2^2, x_2 - x_1 x_2 + x_2^2, x_1^2 - x_1^3)$. Zunächst setzen wir $x_1 \to u_1$ und $x_2 \to u_2$; sodann $x_1^2 \to u_1^2 = u_3$, da nach den bisher vorliegenden Beziehungen keine lineare Abhängigkeit zwischen u_1, u_2 und u_1^2 aufscheint. Ebenso folgt $x_1 x_2 \to u_1 u_2 = u_4$. Für $x_2^2 \to u_2^2$ erhalten wir mit Benützung der beiden ersten Basispolynome: $u_2^2 = -u_2 + u_4 = -u_2 - u_4$, woraus $u_4 = 0$ und $u_2^2 = -u_2$ folgt; wir müssen also auch in der vorausgehenden Zeile u_4 streichen und $u_1 u_2 = 0$ setzen.

Das nächste Potenzprodukt ist $x_1^3 \to u_1^3 = u_1 u_1^2 = u_1 u_3 = u_3$ zufolge des dritten Basispolynoms. Die weiteren Potenzprodukte liefern keine neuen unabhängigen Größen mehr, denn $u_1^2 u_2 = u_1 (u_1 u_2) = = u_2 u_3 = 0$, weil bereits $u_1 u_2 = 0$ ist; ebenso ist $u_1 u_2^2 = 0$ und $u_2^3 = = u_2 u_2^2 = u_2(-u_2) = -u_2^2 = u_2$. Bilden wir noch $u_1^4 = u_1 u_3 = u_3^2 = u_3$, so ist die Multiplikationstafel vollständig und das Verfahren abgeschlossen.

Der Restklassenring $\mathfrak{o} = K[x_1, x_2]/\mathfrak{a}$ ist ein hyperkomplexes System $\mathfrak{o} = K[1, u_1, u_2, u_3]$ mit der Multiplikationstafel

$$\begin{aligned} u_1^2 = u_3,\ u_1 u_2 &= 0, & u_1 u_3 &= u_3, \\ u_2^2 &= -u_2, & u_2 u_3 &= 0, \\ & & u_3^2 &= u_3. \end{aligned}$$

Um die zu $\mathfrak{a}$ gehörige algebraische Mannigfaltigkeit zu ermitteln, müssen wir nun $\mathfrak{a}$ nach dem Satz von *Lasker* und *E. Noether* als reduzierten Durchschnitt von Primäridealen darstellen. Die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale besitzen, wenn der Zahlkörper K genügend algebraisch erweitert ist, jeweils nur eine einzige Nullstelle; diese Nullstellen bilden

[11] Falls eine der Restklassen u_i $(i = 1, \ldots, n)$ sich als linear abhängig von den vorausgehenden erwiesen hat, so ist bei der Abbildung $x_i \to u_i$ selbstverständlich für u_i die entsprechende Linearform einzusetzen. Die höheren Potenzprodukte der x_i werden auf die analogen Potenzprodukte der u_i abgebildet, welche sodann mit Hilfe der Multiplikationstafel auszurechnen sind. Die Restklasse 1 entspricht dem Einselement 1 des hyperkomplexen Systems.

die Lösungen des zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Gleichungssystems, die Länge der betreffenden Primärideale geben die Multiplizität der Lösungen an. Die reduzierte Darstellung kann nach den allgemeinen Methoden der Idealtheorie mit Hilfe der Multiplikationstafel ohne prinzipielle Schwierigkeit gewonnen werden, hier empfiehlt sich etwa folgender Weg:

Mit Hilfe unserer Multiplikationstafel bilden wir die Reihe der Potenzen von u_1, solange, bis wir eine lineare Abhängigkeit zwischen ihnen feststellen können: da $u_1^2 = u_3$ und $u_1^3 = u_3$ ist, folgt $u_1^3 - u_1^2 = 0$, eine Gleichung, deren Wurzeln $u_1 = 0, 1$ sind; ebenso gilt $u_2^2 + u_2 = 0$, also $u_2 = 0, -1$. Wegen $u_1 u_2 = 0$ finden wir im Ring $\mathfrak{o}$ die drei Primideale

$$\mathfrak{p}_1 = (u_1, u_2),\ \mathfrak{p}_2 = (u_1, u_2 + 1),\ \mathfrak{p}_3 = (u_1 - 1, u_2).$$

Wir finden weiter $\mathfrak{p}_1^2 = (u_2, u_3) = \mathfrak{p}_1^3 = \ldots, \mathfrak{p}_2^2 = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3^2 = \mathfrak{p}_3$; daher ist das Nullideal $\mathfrak{n}$ des Ringes $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{p}_1^2, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3]$ und dementsprechend die reduzierte Darstellung unseres Ideals

$$\mathfrak{a} = [(x_1^2, x_2), (x_1, x_2 + 1), (x_1 - 1, x_2)].$$

Daraus können wir die Nullstellen unseres Ideals, bzw. die Lösungen des Gleichungssystems sofort ablesen; sie sind:

$$x_1 = x_2 = 0 \text{ mit der Multiplizität 2,}$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = -1 \text{ mit der Multiplizität 1,}$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 0 \text{ mit der Multiplizität 1,}$$

insgesamt also 4 Nullstellen in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß der Restklassenring 4 linear unabhängige Größen enthält.

6. Ich habe diese Methode seit etwa 17 Jahren in den verschiedensten, auch komplizierten Fällen verwendet und erprobt und glaube auf Grund meiner Erfahrungen sagen zu können, daß sie tatsächlich in allen Fällen ein brauchbares und wertvolles Werkzeug zur Lösung von diesen und ähnlichen idealtheoretischen Aufgaben darstellt. Nachdem ich oft gefragt worden bin, wie man die reduzierte Darstellung eines Polynomideals am leichtesten gewinnt, habe ich mich nunmehr entschlossen, diese Methode in ihren wesentlichen Zügen und unter Verzicht auf Einzelheiten der Öffentlichkeit vorzulegen. Es ist klar, daß in weniger einfachen Fällen die Arbeit, welche in der Ermittlung der Multiplikationstafel und den weiteren Rechnungen steckt, sehr groß werden kann; ich glaube aber versichern zu können, daß diese Arbeit niemals größer ist, als diejenige, welche etwa die *Kronecker*sche Eliminationsmethode erfordert; vor allem fällt aber ins Gewicht, daß nur diese Methode einen sicheren Aufschluß über die feinere Struktur und die Multiplizität der Lösungen liefert.

Buchbesprechungen.

Philosophie und Mathematik. Vorträge und Essays. Von *A. N. Whitehead.* Aus dem Englischen übersetzt von Felizitas Ortner. (Sammlung „Die Universität": Band 9.) 216 S. Wien: Humboldt-Verlag. 1949. Geb. S 23.—.

Dieses Buch bringt Vorträge und Essays des 1947 verstorbenen bedeutenden Logikers und Mathematikers. Ich gebe zunächst die Titel an: 1. Unsterblichkeit, 2. Sinnanalyse, 3. Gleichförmigkeit und Zufall, 4. Die Mathematik und das Gute, 5. Die erste physikalische Synthese, 6. Einsteins Theorie, 7. Mathematik, 8. Axiome der Geometrie, 9. Nichteuklidische Geometrie.

Man sieht aus dieser Titelangabe, daß das Thema von Philosophie über Physik bis zur Mathematik reicht. Das achte und neunte Kapitel dringen sehr tief in die Grundlagen der Geometrie ein und bringen auch mathematische Formeln und Gleichungen. Sie sind aus der elften Auflage der Encyclopaedia Britannica übernommen und stellen eine Zusammenfassung der Werke „The Axioms of Projective Geometry" und „The Axioms of Descriptive Geometry" in den Cambridge Tracts dar.

Ich möchte es dahingestellt lassen, ob diesen Kapiteln das Publikum, für das die Bücher dieser Sammlung bestimmt sind, folgen kann. Das Verständnis wird auch manchmal durch eine nicht glückliche Übersetzung erschwert. Es wird z. B. das englische Wort „latent" ungeändert übernommen, obwohl der entsprechende deutsche Fachausdruck „fest" hier „fix" lautet. Das Axiom 3 auf S. 174 „Es kann immer eine infinitesimale Transformation gefunden werden, welche die Bedingung erfüllt, daß wenigstens in einem abgeschlossenen Bereich jede Gerade und jeder Punkt auf der Geraden latent sind, d. h. sich selbst entspricht" heißt richtig: Zu jeder vorgegebenen Geraden und zu jedem vorgegebenen Punkt in einem abgeschlossenen Bereich auf dieser Geraden gibt es eine infinitesimale Transformation, welche diese Gerade und diesen Punkt festläßt.

Trotz dieser Einwände ist es sehr zu begrüßen, daß uns die Gedanken des großen Logikers über Philosophie, Physik und Mathematik zugänglich gemacht wurden. Eine kurze Biographie des Verfassers wurde dem Buch beigegeben.

E. Hlawka, Wien

Vorlesungen über höhere Mathematik. Von *A. Duschek.* Erster Band: Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. — Anwendungen. — Numerische Methoden. — Algebraische Gleichungen. — Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 167 Textabb., X, 395 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 78.—, geb. S 87.—; sfr 33.90, geb. sfr 37.80; $ 7.80, geb. $ 8.70, DM 26.—, geb. DM 29.—.

Soll sich ein aus einer technischen Hochschule hervorgegangener Ingenieur wesentlich von einem Techniker unterscheiden, so muß er eine weit gründlichere theoretische Ausbildung mitbringen. Nur eine solche befähigt ihn, Arbeiten auszuführen, wie sie in den Forschungsabteilungen der größeren Industrien

verlangt werden. Man muß Prof. Duschek besonders danken, daß er im Jahre 1945 eine Studienreform an der Wiener Technischen Hochschule durchgesetzt hat, wodurch die in den vorhergegangenen 20 Jahren allzu beschnittene theoretische Ausbildung wieder erweitert und vertieft wurde. Mit Rücksicht darauf, daß jetzt fast alle vor 1945 erschienenen mathematischen Bücher vergriffen sind, und weiters, daß jetzt an der Technischen Hochschule in Wien Mathematik viel ausführlicher gelehrt wird, ist es durchaus berechtigt und erfreulich, daß Prof. Duschek seine Vorlesungen in Buchform herausgibt. Zunächst erschien der erste Band der Vorlesungen über höhere Mathematik, der in erster Linie die Differential- und Integralrechnung der Funktionen mit einer Variablen enthält. Da das Buch vor allem für die angehenden Ingenieure und Physiker gedacht ist, so enthält es viele Anwendungen, insbesonders numerische Methoden. Relativ großen Raum nimmt die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein. Dies ist durchaus berechtigt, da Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der modernen Physik und Technik eine große Rolle spielen. Es wäre allerdings wünschenswert, wenn die Abschnitte über die Wahrscheinlichkeitsrechnung (aus dem 1. und 2. Band) für sich in Buchform erscheinen würden. Dafür wäre großes Interesse vorhanden und der Erwerb finanziell leichter möglich. Wenn auch das Buch in erster Linie für angehende Ingenieure und Physiker geschrieben ist, so möchte ich ausdrücklich feststellen, daß das Buch auch von den Studierenden der Mathematik mit großem Nutzen gelesen werden kann. Erscheint ein Buch über Differential- und Integralrechnung, so gibt es Kritiker, die nur darauf ausgehen, Mängel zu finden, was die Exaktheit betrifft. Solch einseitige nur negative Kritik ist ganz fehl. Die geringfügigen Versehen stehen doch in gar keinem Verhältnis zu den großen Vorzügen des Buches. Jeder objektive Kritiker muß dem Autor und dem Springer-Verlag danken, daß dieses Buch erschienen ist.

N. Hofreiter, Wien

Introduction to Algebraic Geometry. Von *J. G. Semple* und *L. Roth*. Mit 16 Textabb., XVI, 446 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1949. Geb. 30 s. net.

Dieses Buch soll es dem Studenten ermöglichen, auf möglichst direktem Wege die hauptsächlichsten Problemstellungen und Resultate der modernen algebraischen Geometrie kennenzulernen. Dieses Ziel haben die Verfasser vollauf erreicht. Das Buch setzt an Vorkenntnissen nur die Anfangsgründe der analytischen Geometrie und Algebra voraus. Nach einem einleitenden Kapitel wird die Theorie der ebenen Kurven entwickelt (Kap. II—V). Darauf folgen drei Kapitel über lineare Systeme und die Technik der Transformationen. Besonders ist hier die ausführliche Diskussion spezieller rationaler Flächen zu erwähnen. Kap. IX handelt von den projektiven Invarianten der Kurven und Flächen, Kap. X von der Liniengeometrie im drei- und vierdimensionalen projektiven Raum. Das nächste Kapitel ist der abzählenden Geometrie gewidmet. Die beiden Schlußkapitel bringen eine Einleitung in die Geometrie auf einer Kurve und die Geometrie auf einer Fläche.

Als besonderer Vorteil erscheint die Kürze und Prägnanz der Darstellung. Durch sie wird der Leser fortwährend zur Mitarbeit angeregt. Demselben Zweck dienst auch die überaus große Anzahl von Beispielen und Übungen die in den Text eingestreut sind und das Verständnis für den Stoff wesentlich erleichtern. Sie sollen dem Leser auch eine gewisse Arbeitstechnik vermitteln.

Die gute Ausstattung des Werkes entspricht der alten Tradition der Oxford-Bücher.

K. Prachar, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII., Herbeckstraße 5. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Lehrbuch der Funktionentheorie

Von

Professor Dr. **H. Hornich**, Graz

Mit 34 Textabbildungen. VII, 216 Seiten, 1950

S 60.—, sfr. 19.80, $ 4.70, DM 19.50

Soeben erschien:

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung

Von

Professor Dr. **A. Duschek** und Dr. techn. **A. Hochrainer**

Wien Wien

II. Teil: **Tensoranalysis**

Mit 64 Textabbildungen. VII, 338 Seiten. 1950

S 78.—, sfr. 26.—, $ 6.—, DM 24.80

Früher erschien:

1. Teil: **Tensoralgebra.** 2. Auflage

Mit 26 Textabbildungen. VI, 129 Seiten. 1948

S 27.—, sfr. 12.—, $ 2.70, DM 9.—

In Vorbereitung:

III. Teil: **Anwendungen in Physik und Technik**

Soeben erschien:

Der Aufbau der Materie

Von

Professor Dr. **K. W. Fritz Kohlrausch**, Graz

Mit 120 Textabbildungen. X, 306 Seiten. 1949

S 45.—, sfr. 14.—, $ 3.30, DM 13.50

Früher erschienen:

I. Teil: **Mechanik.** Mit 35 Textabbildungen. V, 105 Seiten. 1947
S 16.—, sfr. 6.60, $ 1.60, DM 4.80

II. Teil: **Optik.** Mit 73 Textabbildungen. VI, 146 Seiten. 1948
S 20.—, sfr. 9.60, $ 2.20, DM 6.—

III. Teil: **Wärme.** Mit 35 Textabbildungen. VI, 127 Seiten, 1948
S 18.—, sfr. 9.—, $ 2.10, DM 6.—

IV. Teil: **Elektrizität.** Mit 115 Textabbildungen. VIII, 253 Seiten. 1948
S 36.—, sfr. 16.—, $ 3.70, DM 9.60

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria